Soluție - Problema a III –a

Frânghia care cade (10 puncte)

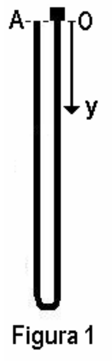

Figura 1

O frânghie foarte flexibilă şi inextensibilă de lungime 2ℓ şi de masă $2m$, are un capăt O fixat într-un suport. Celălalt capăt A al frânghiei este ținut la acelaşi nivel cu capătul O (vezi Figura 1). Se lasă liber capătul A al frânghiei. Neglijează orice interacțiune a frânghiei cu mediul, cu excepția gravitației caracterizate prin accelerația gravitațională $\vec{g}$ şi consideră că masa frânghiei este distribuită uniform de-a lungul acesteia.

a. Determină dependența de timp a coordonatei capătului liber al frânghiei, în raport cu axa Oy indicată în figura 1, pentru intervalul de timp în care acest capăt se mişcă. Exprimă rezultatul în funcție de accelerația gravitațională g, de lungimea ℓ şi de timpul t, măsurat din momentul în care capătul liber al frânghiei începe să cadă.

Sugestie: În situația în care consideri necesar, poți să-ți imaginezi că divizezi porțiunea din frânghia care cade, în două bucăți având masele m_1 şi respectiv m_2 şi că cele două bucăți sunt legate printr-un fir ideal (vezi Figura 2).

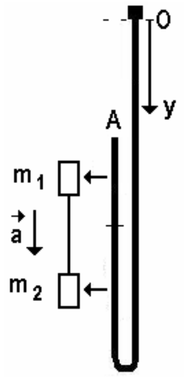

Figura 2

b. Determină dependența de timp a coordonatei punctului de curbură al frânghiei, în raport cu axa Oy indicată în figura 1, pentru intervalul de timp în care punctul de curbură se mişcă. Exprimă rezultatul în funcție de accelerația gravitațională g, de lungimea ℓ şi de timpul t, măsurat din momentul în care capătul liber al frânghiei începe să cadă.

c. Reprezintă grafic, pe aceeaşi diagramă, dependența de timp a coordonatei capătului liber al frânghiei, dedusă la punctul a, şi dependența de timp a coordonatei punctului de curbură al frânghiei, dedusă la punctul b.

d. Dedu dependența de timp a energiei cinetice a frânghiei, în intervalul de timp cât aceasta se mişcă. Exprimă rezultatul în funcție de accelerația gravitațională g, de lungimea ℓ, de masa m şi de timpul t, măsurat din momentul în care capătul liber al frânghiei începe să cadă.

a. Deoarece lungimea frânghiei – un corp cu proprietăți uniforme - este 2ℓ şi masa sa este $2m$, masa unității sale de lungime este ρ. Dacă divizezi mintal porțiunea din frânghie care cade în două bucăți având respectiv masele m_1 şi m_2 ca în figura 1.1. ambele bucăți cad cu aceeaşi accelerație a.

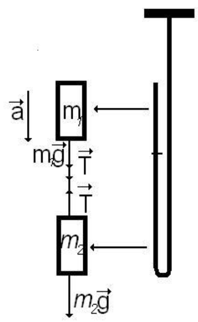

Figura 1.1

Pentru cele două corpuri, care interacționează prin tensiunea T, se pot scrie relațiile

$$\begin{cases} m_1 g + T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \qquad (1.\ 1)$$

Din adunarea relațiilor rezultă

$$\begin{cases} a = g \\ T = 0 \end{cases} \qquad (1.\ 2)$$

Capătul A al frânghiei ca şi toată bucata mobilă cade cu accelerația g .
Legile de mişcare ale punctului A sunt – în sistemul de referință unidimensional reprezentat în figura 1.2

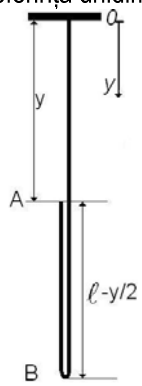

Figura 1.2

$$\begin{cases} a = g \\ v = g \cdot t \\ y = \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases} \qquad (1.\ 3)$$

Legile de mişcare scrise mai sus sunt valide în intervalul de timp t_m necesar pentru ca frânghia să se deruleze complet . Deoarece

$$\begin{cases} y(t_m) = 2\ell \\ \dfrac{g \cdot t_m^2}{2} = 2\ell \end{cases} \qquad (1.\ 4)$$

şi deci

$$t_m = 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (1.\ 5)$$

În concluzie

$$y_A(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad pentru\ t \le 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (1.\ 6)$$

Relația 1.6 reprezintă răspunsul la punctul a.

b. Punctul B de curbură a frânghiei ce cade din poziția inițială ℓ cu accelerația $g/2$ se va supune legilor de mişcare

$$\begin{cases} a = \dfrac{g}{2} \\ v = \dfrac{1}{2} g \cdot t \\ y = \ell + \dfrac{g \cdot t^2}{4} \end{cases} \qquad (1.\ 7)$$

În concluzie

$$y_B(t) = \ell + \frac{g \cdot t^2}{4} \quad \text{pentru} \quad t \le 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1. 8}$$

Relația (1.8) reprezintă răspunsul la punctul b.

c. Graficele din figura 1.3 reprezintă răspunsul la punctul c.

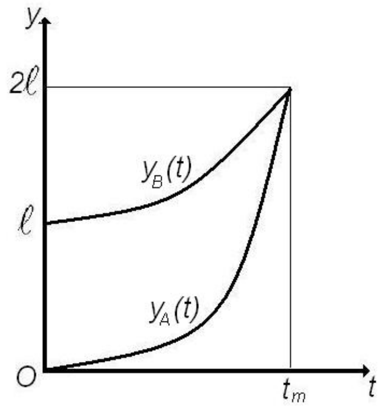

Figura 1.3

d. Deoarece frânghia are lungimea totală 2ℓ, lungimea porțiunii „dublate" din figura 1.2 este $z = \ell - y/2$. Masa porțiunii care cade este

$$m' = z \cdot \frac{m}{\ell} = \frac{m}{\ell} \cdot \left(\ell - \frac{y}{2} \right) \tag{1. 9}$$

iar viteza sa – în funcție de poziția atinsă de capătul liber – are expresia

$$v(y) = \sqrt{2gy} \tag{1. 10}$$

dată de legea Galilei.
Energia cinetică a porțiunii de frânghie în mişcare are deci expresia

$$E_{cin}(y) = \frac{m'v^2}{2} = \frac{m}{\ell} \cdot \left(\ell - \frac{y}{2} \right) \cdot g \cdot y \tag{1. 11}$$

În funcție de timp energia cinetică se scrie

$$E_{cin}(t) = \frac{m'v^2}{2} = m\,g \left(1 - \frac{1}{2\ell} \left(\frac{gt^2}{2} \right) \right) \frac{gt^2}{2} \quad \text{pentru} \quad t \le 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1. 12}$$

Relația (1.12) reprezintă răspunsul la punctul d.

Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării şi Tineretului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti