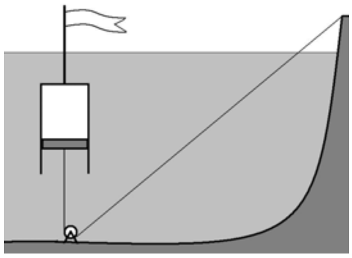
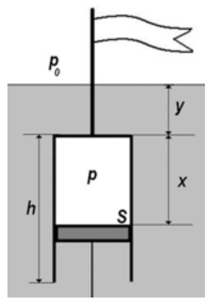
Soluție – Problema I

Geamandura (10 puncte)



O geamandură este un cilindru, având volumul $V = 0{,}4\ m^3$, închis cu un piston cu grosimea neglijabilă şi cu suprafața $S = 0{,}40\ m^2$. Masa pistonului este $m = 10\ kg$.
Printr-un cablu inextensibil, perfect deformabil, trecut peste un scripete fix şi legat de mal, pistonul este menținut tot timpul la aceeaşi distanță față de fundul mării. De cilindru este prins un steag care are lungimea lăncii $\ell = 2{,}0m$ (vezi figura alăturată). Atunci când geamandura pluteşte, astfel încât lancea steagului este cufundată până la jumătate din înălțimea sa în apă, pistonul intră în cilindru pe o distanță $D = 0{,}11\ m\ (\cong 1/9)m$. Înaintea cufundării în mare, aerul din geamandură se afla la presiunea atmosferică $p_0 = 10^5 N/m^2$. Temperatura comună a apei şi a aerului rămâne constantă. Consideră că presiunea atmosferică p_0 nu se modifică, că volumul lăncii steagului este neglijabil, că densitatea apei de mare este $\rho = 1000\,kg/m^3$ şi că accelerația gravitațională are valoarea $g = 10\,m \cdot s^{-2}$.
Determină:
a. masa cilindrului geamandurii cu steag;
b. cu cât a coborât marea în timpul refluxului, față de situația descrisă anterior, atunci când lancea steagului iese din apă pe trei sferturi din înălțimea sa;
c. valoarea tensiunii mecanice maxime suportată de cablul de care este legat pistonul, dacă acesta se rupe atunci când steagul este cufundat în apă până la vârful lăncii.



Pentru descrierea geometrică a situațiilor din problemă se pot face notații ca cele din figura alăturată:

- y - distanța dintre capătul superior al geamandurii şi suprafața apei;
- $h = 1m$ - lungimea cilindrului;
- x - lungimea „camerei de aer" a geamandurii;
- p - presiunea a aerului din cilindrul aflat la o adâncime oarecare în apă.

Sistemul din problemă este alcătuit din cilindru, gazul din cilindru şi pistonul legat de mal.
Echilibrul fiecăreia dintre componentele sistemului poate fi descrisă cu câte o ecuație.
Echilibrul cilindrului se realizează sub acțiunea forței determinate de presiunea exterioară exercitate pe suprafața de sus a cilindrului, a forței determinate de presiunea interioară pe suprafața de sus a cilindrului şi de greutatea $M \cdot g$ cilindrului

$$(p_0 + \rho \cdot g \cdot y) \cdot S + M \cdot g - p \cdot S = 0 \qquad (1)$$

Gazul din cilindru aflat inițial în condițiile descrise în enunț suferă o transformare izotermă descrisă de ecuația

$$p_0 \cdot V = p \cdot S \cdot x \qquad (2)$$

de unde

$$p = p_0 \cdot \frac{h}{x} \qquad (3)$$

Pistonul se află în echilibru sub acțiunea forței determinate de presiunea exterioară $p_0+\rho\cdot g\cdot(x+y)$, a forței determinate de presiunea interioară, a greutății proprii şi a forței de tracțiune T determinată de cablu

$$p\cdot S+mg+T-(p_0+(x+y)\cdot\rho\cdot g)\cdot S=0 \qquad (4)$$

a. Din sistemul ecuațiilor (1) şi (2)

$$\begin{cases}(p_0+\rho\cdot g\cdot y)\cdot S+M\cdot g-p\cdot S=0\\ p_0\cdot V=p\cdot S\cdot x\end{cases} \qquad (5)$$

rezultă

$$M=\frac{p_0\cdot S}{g}\left[\left(\frac{h}{x}-1\right)-\frac{\rho\cdot g\cdot y}{p_0}\right] \qquad (6)$$

Pentru situația descrisă la punctul a, în care

$$\begin{cases}x=h-D=h\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}h\ ;\ x=\frac{8}{9}m\\ y=\frac{\ell}{2}\ ;\ y=1m\end{cases} \qquad (7)$$

expresia (6) conduce la

$$M=\frac{4\times10^4}{10}\left[\frac{1}{8}-\frac{10^4}{10^5}\right]=100kg \qquad (8)$$

Dacă se notează cu d distanța constantă dintre suprafața pistonului şi fundul apei, adâncimea H a apei în situația descrisă la punctul a este

$$H=d+x+y \qquad (9)$$

b. Pentru noua situație lungimea „camerei de aer" a geamandurii este x' iar distanța de la capătul superior al cilindrului la suprafața apei este $y'=\ell/4$; aerul din cilindru are o nouă presiune, p'. Sistemul ecuațiilor care descriu echilibrul cilindrului şi evoluția aerul din interiorul cilindrului este

$$\begin{cases}(p_0+\rho\cdot g\cdot y')\cdot S+M\cdot g-p'\cdot S=0\\ p_0\cdot V=p'\cdot S\cdot x'\end{cases} \qquad (10)$$

Prin eliminarea presiunii se obține relația

$$(p_0+\rho\cdot g\cdot y')\cdot S+M\cdot g=\frac{p_0\cdot V}{x'} \qquad (11)$$

Din sistemul (5) se poate obține o relație analogă

$$(p_0+\rho\cdot g\cdot y)\cdot S+M\cdot g=\frac{p_0\cdot V}{x} \qquad (12)$$

Prin scăderea relațiilor (11) şi (12) se obține

$$\begin{cases}\rho\cdot g\cdot S(y-y')=p_0\cdot V\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right)\\ \frac{1}{x'}=\frac{1}{x}-\frac{\rho\cdot g\cdot S}{p_0\cdot V}(y-y')=\frac{1}{x}-\frac{\rho\cdot g\cdot S\cdot\ell}{4p_0\cdot V}\end{cases} \qquad (13)$$

Numeric,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x'} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{10^4 \times 2}{4 \times 10^5} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{43}{40} m^{-1} \\ x' = \dfrac{40}{43} m \cong 0{,}93m \end{cases} \quad (14)$$

Noua adâncime H' a apei este

$$H' = d + x' + y' \quad (15)$$

Scăderea înălțimii apei, ΔH are expresia

$$\Delta H = H - H' = (d + x + y) - (d + x' + y') = x + y - x' - y' \quad (16)$$

şi valoarea numerică

$$\Delta H = \frac{8}{9} - \frac{40}{43} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{355}{774} \cong 0{,}45\,m \quad (17)$$

c. Relația (4) permite scrierea tensiunii din cablu sub forma

$$\begin{cases} T = (p_0 + (x'' + y'') \cdot \rho \cdot g) \cdot S - p'' \cdot S - m \cdot g \\ T = (p_0 + (x'' + y'') \cdot \rho \cdot g) \cdot S - \dfrac{p_0 \cdot V}{x''} - m \cdot g \end{cases} \quad (18)$$

unde y'' şi x'' sunt valorile noi ale distanței dintre capătul de sus al cilindrului şi suprafața apei, respectiv lungimea coloanei de aer din cilindru.
Din relația (12) scrisă pentru $y'' = \ell$ rezultă

$$x'' = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\rho \cdot g \cdot \ell}{p_0}\right) \cdot \dfrac{1}{h} + \dfrac{M \cdot g}{p_0 \cdot V}}. \quad (19)$$

Atunci când lancea steagului este complet cufundată în apă, lungimea coloanei de aer din cilindru este

$$x'' = \frac{40}{49} m \cong 0{,}81m \quad (20)$$

Deoarece

$$(p_0 + \rho \cdot g \cdot y'') \cdot S = \frac{p_0 \cdot V}{x''} - M \cdot g \quad (21)$$

ultima relație din (18) se rescrie sub forma

$$\begin{cases} T = x'' \cdot \rho \cdot g \cdot S - \dfrac{p_0 \cdot V}{x''} - m \cdot g + \dfrac{p_0 \cdot V}{x''} - M \cdot g \\ T = x'' \cdot \rho \cdot g \cdot S - (m + M) \cdot g \end{cases} \quad (22)$$

Valoarea numerică a tensiunii maxime suportată de cablu este

$$T = \frac{40}{49} \cdot 10^4 \cdot 0{,}4 - 110 \cdot 10 \cong 2100N \quad (23)$$

Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării şi Tineretului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti