Problema a III-a (10 puncte)

Ce ar trebui să ştie vânătorii ...

Datorită gazelor rezultate în urma arderii explozive a încărcăturii propulsoare, un glonț se deplasează de-a lungul țevii unei arme de vânătoare, asemenea pistonului într-un cilindru. Gazele rezultate prin arderea explozibilului pot avea presiuni de circa $400 MPa$, iar viteza glonțului poate fi de aproximativ $700 m/s$.

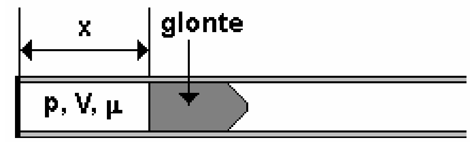


Figura 3

În figura 3 este prezentată o secțiune longitudinală în țeava unei arme de vânătoare (desenul nu este realizat la scară). În figura 4 este prezentată evoluția presiunii gazelor din țeava armei în funcție de coordonata x a glontelui, măsurată față de poziția din care acesta îşi începe deplasarea pe țeavă. Aşa cum se poate observa din figura 4, în cursul deplasării glontelui există o poziție a acestuia pentru care presiunea gazelor în țeavă este maximă (p_M).

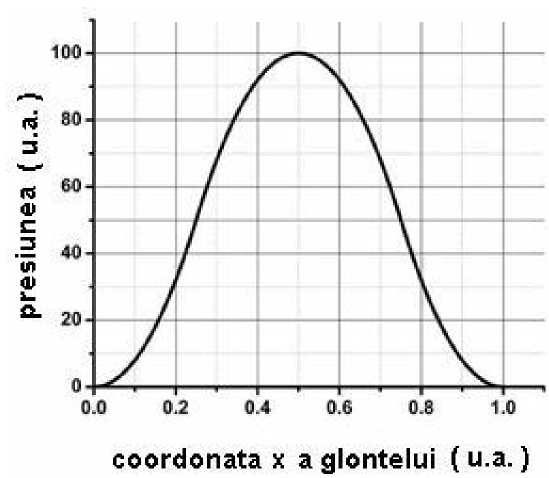


Figura 4

Consideră că în timpul deplasării glontelui de-a lungul țevii, temperatura T_0 şi masa molară medie μ a amestecului de gaze rămân constante, că aria secțiunii transversale a glontelui este A şi că lungimea glontelui este neglijabilă față de lungimea țevii. În poziția în care presiunea gazelor este maximă, glontele are viteza v_g.
Presupune că gazele din țeava armei pot fi considerate ideale.

a. Determină expresia vitezei $v_e (kg/s)$ de generare a gazelor rezultate în urma arderii explozive a încărcăturii propulsoare a glontelui, în situația în care presiunea gazelor din țeava armei este p_M. Exprimă rezultatul în funcție de v_g, T_0, A, p_M, μ şi de constanta universală R a gazelor ideale.

Într-o modelare simplă poți admite că expresia analitică a dependenței presiunii gazelor din țeava armei de coordonata x este descrisă de trei arce de parabolă racordate

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{8p_M}{L^2}\cdot x^2 & , \; x\in[0,\, L/4] \\ \dfrac{p_M}{L^2}\cdot\left[-8(x-L/2)^2+L^2\right] & , \; x\in(L/4\,,3L/4) \\ \dfrac{8p_M}{L^2}\cdot(x-L)^2 & , \; x\in[3L/4\,,\,L] \end{cases} \qquad (1)$$

În expresia (1), L este lungimea țevii armei.

Soluție - Problema a III-a

b. Reprezintă grafic dependența $p = p(V)$ a presiunii gazelor de volumul V ocupat de acestea, în cursul deplasării glontelui din poziția inițială până la jumătatea lungimii țevii. Consideră că dependența presiunii gazelor de coordonata x este cea descrisă de relația (1).
c. Determină expresia lucrului mecanic efectuat de gazele rezultate în urma arderii încărcăturii propulsoare, în cursul deplasării glontelui din poziția inițială până la jumătatea lungimii țevii. Exprimă rezultatul în funcție de p_M, A şi L.
d. Determină expresia masei gazelor din țeava armei, în momentul în care glontele se află la jumătatea lungimii țevii. Exprimă rezultatul în funcție de T_0, A, p_M, L, μ şi R.

Dacă îți este necesar, poți folosi relațiile:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

Soluție - Problema a III-a

a. Ecuația de stare pentru gazele din țeava armei atunci când presiunea are valoarea p_M este

$$p_M \cdot V = \frac{m}{\mu} R \cdot T_0 \qquad (3)$$

unde V este volumul gazelor de ardere determinat de poziția respectivă a glonțului.
La un moment imediat ulterior, după scurgerea unui timp foarte scurt, Δt la care datorită deplasării glonțului volumul ocupat de gaze devine

$$V' = V'(t + \Delta t) = V + v_g \cdot \Delta t \cdot A \qquad (4)$$

se poate presupune că presiunea a rămas constantă – deoarece în jurul extremului unei funcții aceasta nu variază.
Prin urmare

$$p_M \cdot (V + v_g \cdot \Delta t) = \frac{m + \Delta m}{\mu} R \cdot T_0 \qquad (5)$$

Din scăderea relațiilor (3) şi (5) rezultă

$$p_M \cdot v_g \cdot A \cdot \Delta t = \frac{\Delta m}{\mu} R \cdot T_0 \qquad (6)$$

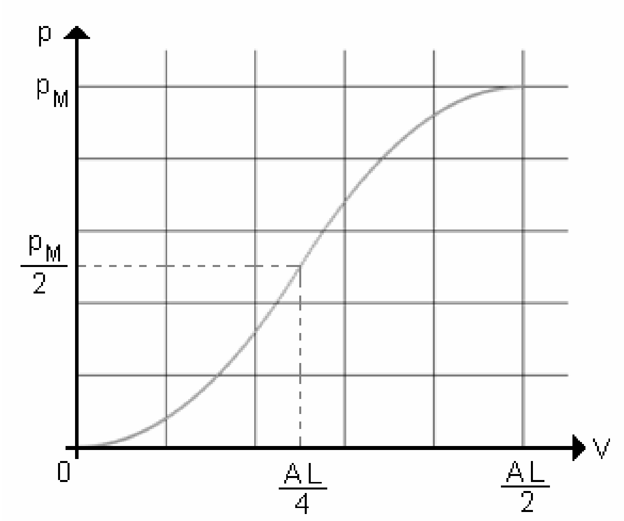
$$v_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}, \text{ pentru } \Delta t \to 0 \qquad (7)$$

În consecință,

$$v_e = \mu \cdot \frac{p_M \cdot v_g \cdot A}{R \cdot T_0} \qquad (8)^*$$

b.

$$p(V) = \begin{cases} \dfrac{8p_M}{L^2 A^2} \cdot V^2 & , \ V \in [0,\ AL/4] \\ \dfrac{p_M}{L^2} \cdot \left[-8\left(\dfrac{V}{A} - L/2\right)^2 + L^2 \right] & , \ x \in (AL/4,\ AL/2] \end{cases} \qquad (9)^*$$



c.

$$L_{gaze} = \frac{P_{max} \cdot A \cdot L}{4} \qquad (10)^*$$

Se admite orice soluție corectă bazată pe:

- *folosirea divizării (prin construirea histogramei sub curba din desenul – răspuns la punctul anterior) şi calculul ariei cu folosirea sumelor date*
- *un comentariu referitor la echivalența dintre aria delimitată de curba $p = p(V)$, axa volumelor şi dreapta $V = A \cdot L/2$ şi aria unui dreptunghi cu laturile p_{max}, respectiv $A \cdot L/4$.*
- *calcul integral*

d. În situația în care glontele este la jumătatea țevii, ecuația termică de stare pentru gazele rezultate din ardere are expresia

$$p_M \frac{L \cdot A}{2} = \frac{m}{\mu} RT_0 \qquad (11)$$

şi deci

$$m = p_M \frac{L \cdot A \cdot \mu}{2 \cdot R \cdot T_0} \qquad (12^*)$$

Subiect şi soluție propuse de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Evaluare şi Examinare – Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti