Problema I (10 puncte)

Mişcări periodice

A. *În motorul cu explozie, mişcarea pistonului în cilindru, produce rotația unei volante (vezi figura 1).*

Consideră că volanta se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω şi că raza r a volantei este mult mai mică decât lungimea ℓ a barei care cuplează volanta la piston.

a. Demonstrează că în aceste condiții mişcarea pistonului este, practic, o mişcare oscilatorie armonică.

b. Calculează accelerația maximă a pistonului pentru un motor a cărei volantă se roteşte cu turația de $800\,rotatii\,/\,min$ şi are raza $r = 2\,cm$.

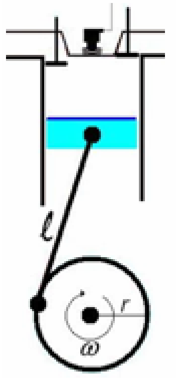

Figura 1

B. *Adesea, părți ale mecanismelor moderne sunt supuse simultan mai multor mişcări oscilatorii, dobândind astfel traiectorii complicate, dar utile din punct de vedere tehnologic.*

Un corp de mici dimensiuni, ce poate fi considerat punct material este supus acțiunii simultane a două oscilații armonice ale căror legi de mişcare sunt :

$$x(t) = 1{,}00 \cdot \sin 2t$$

$$y(t) = 1{,}00 \cdot \sin t$$

În expresiile de mai sus lungimile sunt măsurate în m, iar timpul în s.

Cele două oscilații armonice se desfăşoară pe direcțiile perpendiculare Ox şi Oy.

a. Construieşte un tabel de variație în timp a coordonatelor x şi y şi reprezintă grafic, în două diagrame distincte cele două legi de mişcare $x(t) = 1{,}00 \cdot \sin 2t$ şi $y(t) = 1{,}00 \cdot \sin t$.

b. Schițează traiectoria mişcării corpului de mici dimensiuni, supus acțiunii simultane a celor două oscilații armonice perpendiculare în sistemul de coordonate xOy. Marchează pe schiță coordonatele punctelor pe care le consideri importante.

c. Dedu ecuația traiectoriei acestui corp.

d. Determină momentele de timp la care viteza corpului este orientată pe direcția uneia dintre axele de coordonate şi valorile corespunzătoare ale acestei viteze.

Problema I - Soluție

A.

a. Într-un sistem de referință cu centrul pe axul volantei (figura 2), coordonatele capătului de pe volantă al barei care leagă pistonul de volantă sunt

$$\begin{cases} x_v = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y_v = r \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases} \qquad (1)$$

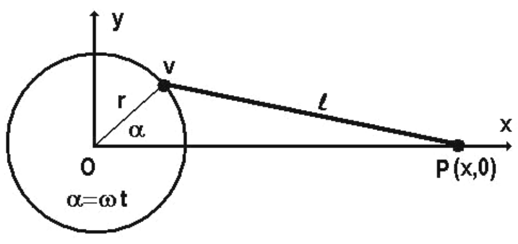

Figura 2

În acelaşi sistem de referință, coordonatele capătului barei dinspre piston, P, sunt

$$\begin{cases} x_P = x \\ y_p = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Pentru lungimea ℓ constantă a barei se poate scrie

$$\begin{cases} \ell^2 = (r \cdot cos(\omega \cdot t) - x)^2 + (r \cdot sin(\omega \cdot t))^2 \\ \ell^2 = r^2 + x^2 - 2 \cdot r \cdot x \cdot cos(\omega \cdot t) \end{cases} \qquad (3)$$

şi în consecință

$$x^2 - 2 \cdot r \cdot x \cdot cos(\omega \cdot t) - (\ell^2 - r^2) = 0 \qquad (4)$$

Ecuația de mai sus are soluțiile

$$x_{1,2} = r \cdot cos(\omega \cdot t) \pm \sqrt{\ell^2 - (r \cdot sin(\omega \cdot t))^2} \qquad (5)$$

Conform enunțului,

$$r << \ell \qquad (6)$$

şi cu atât mai mult

$$r \cdot sin(\omega \cdot t) << \ell \qquad (7)$$

Prin urmare soluția admisă pentru coordonata x a punctului P este

$$x = \ell + r \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (8)$$

Relația (8) descrie o oscilație armonică a punctului P de-a lungul axei Ox . Oscilația are loc între pozițiile

$$\ell + r \geq x \geq \ell - r \qquad (9)$$

şi este centrată pe punctul de coordonate $(\ell, 0)$.

b. Accelerația punctului P (solidar cu pistonul) are expresia

$$a(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t) \qquad (10)$$

Accelerația maximă are deci expresia

$$a_{max} = r \cdot \omega^2 \qquad (11)$$

Valoarea numerică a accelerației maxime în condițiile din enunț (specifice unui motor la ralanti) este

$$a_{max} \cong 140 m \cdot s^{-2} \qquad (12)$$

Observație: Considerând valoarea accelerației gravitaționale $g \cong 10 m \cdot s^{-2}$, *valoarea accelerației maxime se poate scrie ca* $a_{max} \cong 140 m \cdot s^{-2} \cong 14 g$.

Relația (12) reprezintă răspunsul la punctul b.

B.

a. Coordonatele punctului supus celor două oscilații depind de timp conform legilor

$$\begin{cases} x(t) = 1{,}00 \cdot sin 2t \\ y(t) = 1{,}00 \cdot sin t \end{cases} \qquad (13)$$

Conform definiției, pentru oricare valoare a lui t, perioada T a unei funcții $f(t)$ trebuie să satisfacă relația:

$$f(t + T) = f(t) \qquad (14)$$

Perioada T_1 a oscilației pe direcția Ox rezultă din

$$\begin{cases} sin(2t) = sin[2(t + T_1)] \\ 2T_1 = 2\pi \end{cases} \qquad (15)$$

şi are valoarea

$$T_1 = \pi \qquad (16)$$

Analog, perioada T_2 a oscilației pe direcția Oy , descrisă de legea $y(t) = 1{,}00 \cdot sin t$ are valoarea

$$T_2 = 2\pi \qquad (17)$$

Perioada T a mişcării compuse este cel mai mic multiplu comun al celor două perioade

$$T = 2T_1 = T_2 = 2\pi \qquad (18)$$

Toate reprezentările grafice sunt trasate pentru o perioadă a mişcării compuse $T = 2\pi \cong 6{,}28 s$.

În tabelul 1 sunt prezentate valorile coordonatelor x şi y la diferite momente de timp, pentru o perioadă a mişcării compuse.

Tabelul 1

Nr.	$t(s)$		$y(m)$	$x(m)$	*Nr.*	$t(s)$		$y(m)$	$x(m)$
1	0	0,00	0,00	0,00	14	$13\pi/12$	3,40	-0,26	0,50
2	$\pi/12$	0,26	0,26	0,50	15	$7\pi/6$	3,67	-0,50	0,87
3	$\pi/6$	0,52	0,50	0,87	16	$5\pi/4$	3,93	-0,71	1,00
4	$\pi/4$	0,79	0,71	1,00	17	$4\pi/3$	4,19	-0,87	0,87
5	$\pi/3$	1,05	0,87	0,87	18	$17\pi/12$	4,45	-0,97	0,50
6	$5\pi/12$	1,31	0,97	0,50	19	$3\pi/2$	4,71	-1,00	0,00
7	$\pi/2$	1,57	1,00	0,00	20	$19\pi/12$	4,97	-0,97	-0,50
8	$7\pi/12$	1,83	0,97	-0,50	21	$5\pi/3$	5,24	-0,87	-0,87
9	$2\pi/3$	2,09	0,87	-0,87	22	$7\pi/4$	5,50	-0,71	-1,00
10	$3\pi/4$	2,36	0,71	-1,00	23	$11\pi/6$	5,76	-0,50	-0,87
11	$5\pi/6$	2,62	0,50	-0,87	24	$23\pi/12$	6,02	-0,26	-0,50
12	$11\pi/12$	2,88	0,26	-0,50	25	2π	6,28	0,00	0,00
13	π	3,14	0,00	0,00					

În figura 3 este prezentată dependența de timp a coordonatei x, pentru o perioadă a mişcării compuse.

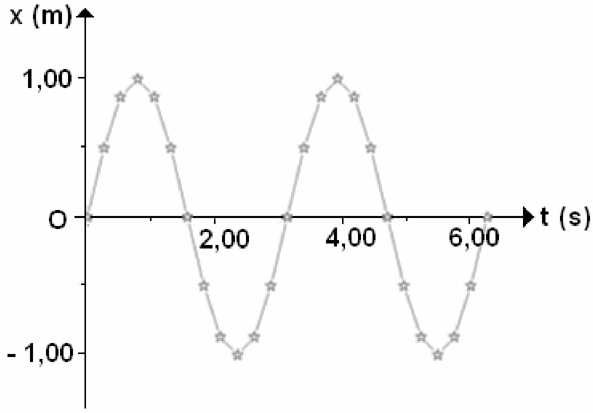

Figura 3

În figura 4 este prezentată dependența de timp a coordonatei y, pentru o perioadă a mişcării compuse.

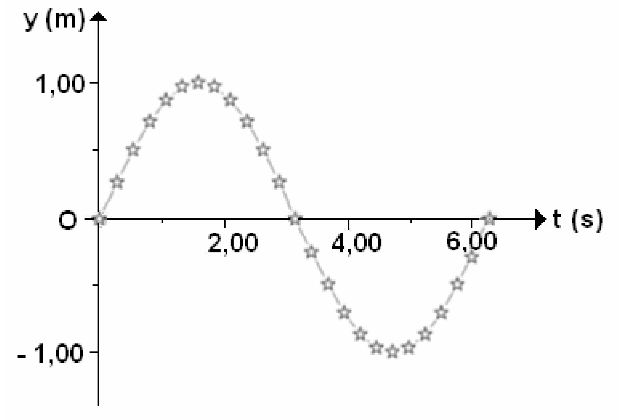

Figura 4

Tabelul 1 şi figurile 3 şi 4 reprezintă răspunsul la punctul a.

b. Pentru trasarea unei schițe a traiectoriei se folosesc datele din tabelul 1. Traiectoria corpului se înscrie în pătratul determinat de valorile extreme ale elongației pentru fiecare dintre cele două oscilații. Pătratul are centrul în originea sistemului de referință xOy.

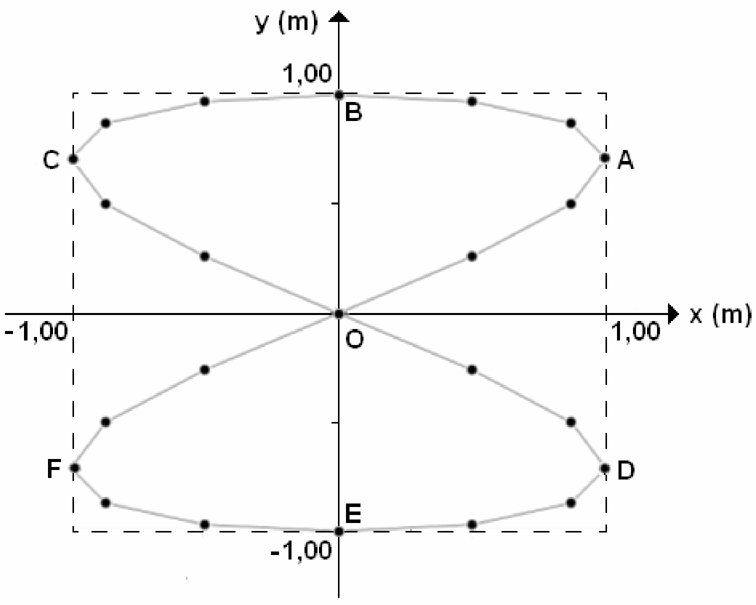

Figura 5

În figura 5 este prezentată schița traiectoriei corpului, supus celor două oscilații perpendiculare. Pe schiță sunt marcate punctele O, A, B, C, D, E, F. Valorile coordonatelor acestor puncte, preluate din tabelul 1 sunt:

$$\text{O}\ \begin{cases} x_O = 0{,}00\,m \\ y_O = 0{,}00\,m \end{cases} \quad \text{A}\ \begin{cases} x_A = 1{,}00\,m \\ y_A = 0{,}71\,m \end{cases} \quad \text{B}\ \begin{cases} x_B = 0{,}00\,m \\ y_B = 1{,}00\,m \end{cases} \quad \text{C}\ \begin{cases} x_C = -1{,}00\,m \\ y_C = 0{,}71\,m \end{cases}$$

$$\text{D}\ \begin{cases} x_D = 1{,}00\,m \\ y_D = -0{,}71\,m \end{cases} \quad \text{E}\ \begin{cases} x_E = 0{,}00\,m \\ y_E = -1{,}00\,m \end{cases} \quad \text{F}\ \begin{cases} x_F = -1{,}00\,m \\ y_F = -0{,}71\,m \end{cases} \qquad (19)$$

Schița din figura 5 şi relația (19) reprezintă răspunsul la punctul b.

c. Traiectoria reprezintă legătura atemporală dintre coordonate. Pentru eliminarea timpului se poate ține cont că

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (20)$$

Prin ridicarea la pătrat a relației (20) rezultă

$$\sin^2(2\alpha) = 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha \cdot \left(1 - \sin^2\alpha\right) \qquad (21)$$

Utilizând relațiile (13) şi (21) se obține ecuația traiectoriei

$$x^2 = 4 \cdot y^2 \cdot \left(1 - y^2\right) \qquad (22)$$

Observații:

1. Coordonata y nu poate avea valori în afara domeniului $[-1;1]$.

2. Expresia

$$x^2 = f(y) = 4 \cdot y^2 \cdot \left(1 - y^2\right) = 1 - \left(2y^2 - 1\right)^2 \qquad (23)$$

trebuie să fie pozitivă pentru orice valoare a lui y şi îşi atinge valoarea maximă egală cu 1, pentru

$$y = \pm\sqrt{2}/2 \qquad (24)$$

3. Coordonata x este limitată la valori în domeniul $[-1;1]$.

Relația (22) reprezintă răspunsul la punctul c.

d. Viteza instantanee a corpului are componentele

$$v_x(t) = 2{,}00 \cdot cos\,2t \tag{25}$$

$$v_y(t) = 1{,}00 \cdot cos\,t \tag{26}$$

şi modulul

$$v(t) = \sqrt{4{,}00 \cdot cos^2\,2t + 1{,}00 \cdot cos^2\,t} \tag{27}$$

Momentele de timp la care componenta pe direcția Ox a vitezei se anulează, astfel încât viteza corpului devine paralelă cu direcția Oy, se determină din condiția

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ 2{,}00 \cdot cos\,2t = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Astfel, rezultă:

$$t_{k\,//\,OY} = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{29}$$

sau

$$t_{k\,//\,OY} \cong (2k+1) \cdot 0{,}79\,s, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{30}$$

Prin urmare, pentru situațiile în care viteza corpului este paralelă cu direcția Oy, valoarea acestei viteze este

$$v\left(t_{k\,//\,OY}\right) = \left|1{,}00 \cdot cos(2k+1)\frac{\pi}{4}\right| \cong 0{,}71\,\frac{m}{s} \tag{31}$$

Momentele de timp la care componenta pe direcția Oy a vitezei corpului se anulează, astfel încât viteza corpului devine paralelă cu direcția Ox, se determină din condiția

$$\begin{cases} v_y(t) = 0 \\ 1{,}00 \cdot cos\,t = 0 \end{cases} \tag{32}$$

rezultând

$$t_{k\,//\,OX} = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{33}$$

sau

$$t_{k\,//\,OX} \cong (2k+1) \cdot 1{,}57\,s, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{34}$$

Pentru situațiile în care viteza corpului este paralelă cu direcția Ox, valoarea acestei viteze este

$$v\left(t_{k\,//\,OX}\right) = \left|2{,}00 \cdot cos(2k+1)\frac{\pi}{2}\right| = 2{,}00\,\frac{m}{s} \tag{35}$$

Relațiile (30), (31), (34) şi (35) reprezintă răspunsul la punctul d.

Soluție propusă de:
Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Evaluare şi Examinare – M E C T S
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti