Problema a III - a (10 puncte)

Comprimare adiabatică…provocată

Un piston, cu aria suprafeței S, închide un gaz ideal monoatomic (γ = 5/3) într-un cilindru vertical drept (Fig. 1). Sistemul se află în câmpul gravitațional terestru, iar ansamblul cilindru – piston este izolat adiabatic de exterior. La echilibru, parametrii gazului sunt p, V şi T. Un corp cu masa m cade liber de la o anumită înălțime şi se lipeşte de piston, astfel încât energia cinetică a pistonului (împreună cu corpul), imediat după lipire, este E_c. Se neglijează frecările dintre piston şi cilindru, capacitatea calorică a ansamblului piston – cilindru, precum şi timpul de interacțiune (lipirea) dintre corp şi piston.

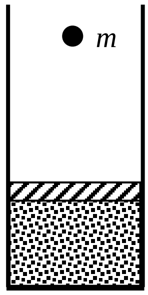

Fig. 1

În aceste condiții, să se determine:

a. diferența de nivel dintre poziția inițială a pistonului şi noua sa poziție de echilibru mecanic (Δy_1);

b. temperatura gazului când pistonul se află în noua poziție de echilibru mecanic (T_1);

c. energia cinetică a pistonului când acesta trece prin noua sa poziție de echilibru mecanic (E_{c1}). Admițând că $mg << pS$, să se aproximeze rezultatul găsit pentru energia cinetică, utilizând formula de aproximație $(1+x)^n \approx 1+nx + n(n-1)x^2/2$, valabilă pentru $x << 1$, n putând fi un număr întreg sau neîntreg.

Problema a III - a (10 puncte) - Soluție

a. Dacă presiunea atmosferică este p_0, iar masa pistonului M, atunci echilibrul mecanic al pistonului, înainte de căderea pietrei, duce la

$$p = p_0 + \frac{Mg}{S}. \qquad (1)$$

În noua poziție de echilibru mecanic, presiunea gazului este

$$p_1 = p_0 + \frac{(m+M)g}{S} = p + \frac{mg}{S} = p\left(1 + \frac{mg}{pS}\right), \qquad (2)$$

iar volumul ocupat de gaz

$$V_1 = V - S\Delta y_1 = V\left(1 - \frac{S\Delta y_1}{V}\right). \qquad (3)$$

Deoarece timpul de lipire a corpului de piston este neglijabil, pistonul nu are timp să se mişte, aşa încât starea inițială a sistemului este caracterizată de mărimile p, V, T, E_c. Din legea transformării adiabatice, scrisă între cele două stări,

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma, \qquad (4)$$

rezultă

$$1 = \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)\left(1 - \frac{S\Delta y_1}{V}\right)^\gamma,$$

sau

$$\boxed{\Delta y_1 = \frac{V}{S}\left[1 - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{3}{5}}\right]}. \qquad (5)$$

b. Scriind legea transformării generale a gazelor pentru cele două stări

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

se găseşte

$$T_1 = T\frac{p_1V_1}{pV} = T\left(1+\frac{mg}{pS}\right)\left(1-\frac{S\Delta y_1}{V}\right). \qquad (6)$$

Introducând (5) în (6), rezultă

$$T_1 = T\frac{p_1V_1}{pV} = T\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{1-\frac{3}{5}} = \boxed{T\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}}. \qquad (7)$$

c. Pentru sistemul gaz – piston, teorema variației energiei se scrie

$$\Delta E = L, \qquad (8)$$

unde lucrul mecanic este efectuat de singura forță externă care acționează asupra acestui sistem, p_0S

$$L = p_0S\cdot\Delta y_1, \qquad (9)$$

iar

$$\Delta E = E_1 - E = (E_{c1}+E_{p1}+U_1)-(E_c+E_p+U) = E_{c1}-E_c+\Delta E_p+\Delta U. \qquad (10)$$

Cum

$$\Delta E_p = -(m+M)g\Delta y_1, \qquad (11)$$

iar

$$\Delta U = \nu C_V(T_1-T) = \frac{3}{2}\nu R(T_1-T) = \frac{3}{2}\nu RT\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right] = \frac{3}{2}pV\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right], \qquad (12)$$

atunci, din (8) – (12) rezultă

$$E_{c1} = E_c + (p_0S+mg+Mg)\Delta y_1 - \frac{3}{2}pV\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right]. \qquad (13)$$

Ținând cont de (1) şi (5), (13) se scrie

$$\begin{aligned}
E_{c1} &= E_c + (pS+mg)\frac{V}{S}\left[1-\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{3}{5}}\right] - \frac{3}{2}pV\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right]\\
&= E_c + pV\left(1+\frac{mg}{pS}\right)\left[1-\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{3}{5}}\right] - \frac{3}{2}pV\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right]\\
&= E_c + pV\left[1+\frac{mg}{pS}-\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}\right] - \frac{3}{2}pV\left[\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}-1\right]\\
&= E_c + pV\left[\frac{5}{2}+\frac{mg}{pS}-\frac{5}{2}\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}\right]\\
&= \boxed{E_c + \frac{5}{2}pV\left[1+\frac{2}{5}\frac{mg}{pS}-\left(1+\frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{5}}\right]}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Dacă $mg \ll pS$, atunci (14) devine

$$\boxed{E_{c1} \cong E_c + \frac{3}{10}\frac{mg}{pS}\cdot mg\frac{V}{S}} \qquad (15)$$

Soluție propusă de:
Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU - Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” Iaşi