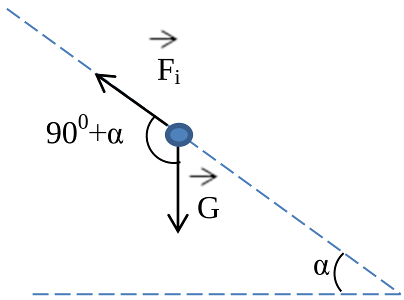
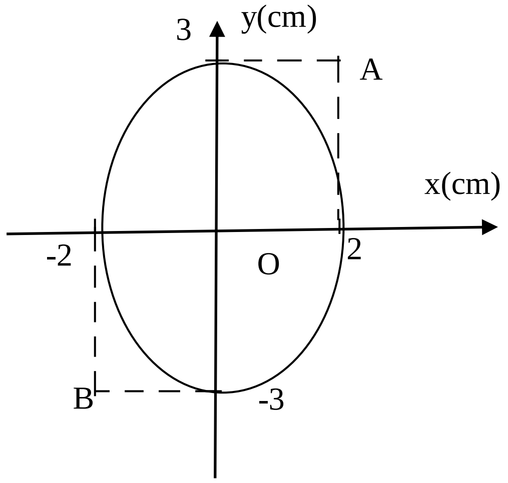
Subiect 1.	**Parţial**	**Punctaj**
1. Barem subiect 1		**10**
I.a. Scoțând sistemul din starea de echilibru prin devierea cu un unghi ϕ și apoi lăsându-l liber, avem: $\Delta Ep = -\Delta Ec$	0,25	
$\Delta E_p = -mgL(1-\cos\phi)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)$	0,5	
$\Delta E_c = \frac{1}{2}m\omega^2\phi^2\left(L^2+\frac{L^2}{9}+\frac{4L^2}{9}\right)$	0,5	
adică $mgL(1-\cos\phi)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}m\omega^2\phi^2\left(L^2+\frac{L^2}{9}+\frac{4L^2}{9}\right)$	0,25	2
Folosind aproximația $1-\cos\phi \simeq \frac{\phi^2}{2}$ obținem $g=\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{7}{9}L$	0,25	
adică $T=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{7L}{g}}$	0,25	
b. În sistemul de referință legat de cutie pe lângă câmpul forțelor gravitaționale mai apare și câmpul forțele de inerție. 	0,25	
accelerația sistemului este: $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$	0,25	2
iar $g_{ef}=\frac{\sqrt{G^2+F_i^2+2GF_i\cos(90^0+\alpha)}}{m}$	0,5	
$g_{ef}=\sqrt{g^2+a^2-2ag\sin\alpha}$	0,5	
$g_{ef}=g\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2}$	0,25	
$T=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{7L}{g_{ef}}}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{7L}{g\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2}}}$	0,25	

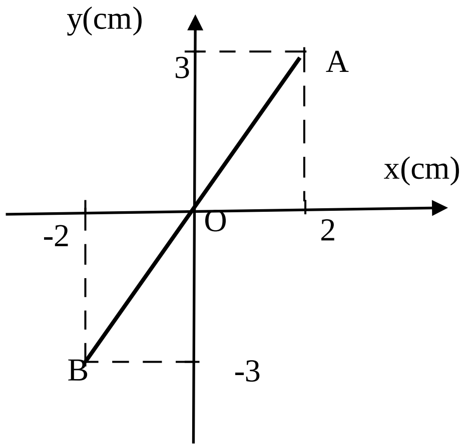
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

c. Scoțând sistemul din starea de echilibru prin devierea cu un unghi ϕ și apoi lăsându-l liber, avem: $\Delta Ep = -\Delta Ec$	0,25	
$$\Delta E_p = -mgL(1-\cos\phi)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-k\left(\frac{L\phi}{2}\right)^2$$	0,5	
$$\Delta E_c = \frac{m\omega^2\phi^2\left(L^2+\frac{L^2}{9}+\frac{4L^2}{9}\right)}{2}$$	0,5	**2**
Folosind aproximația $1-\cos\phi \simeq \frac{\phi^2}{2}$ obținem $$2mg+\frac{kL}{2}=\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{14}{9}mL$$	0,5	
Adică $$T=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{28mL}{4mg+kL}}$$	0,25	
II.a La echilibru $p = p_0$. Prin devierea sistemului spre dreapta scade volumul şi rezultă o forţă $F_s = (p'-p_0)(S_1-S_2)$ care determină revenirea la starea de echilibru. Prin devierea sistemului spre stânga creşte volumul şi rezultă o forţă $F_d = (p_0-p'')(S_1-S_2)$ care determină revenirea la starea de echilibru.	1	
b. Fie x distanţa pe care este deviat sistemul spre dreapta, de la poziţia de echilibru Volumul dintre pistoane devine: $V' = V-(S_1-S_2)x$, iar presiunea $$p' = \frac{pV}{V'} = \frac{p}{1-\frac{1}{V}(S_1-S_2)x} \simeq p+\frac{p}{V}(S_1-S_2)x$$.	1	**3**
Rezultă: $$F = (p'-p)(S_1-S_2) \simeq \frac{p}{V}(S_1-S_2)^2 x$$ $$k=\frac{p}{V}(S_1-S_2)^2;\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\frac{1}{S_1-S_2}\sqrt{\frac{mV}{p}}$$	1	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subiect 2	**Parţial**	**Punctaj**
Barem subiect 2		**10**
I.a) $x = X \cdot \sin \omega t$ $y = Y \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\sin \omega t = \frac{x}{X}$ $\frac{y}{Y} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \omega t$ $\frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cdot \cos \varphi = \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{X^2}}$ $\frac{y^2}{Y^2} + \frac{x^2}{X^2} \cdot \cos^2 \varphi - \frac{2xy}{XY} \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \frac{x^2}{X^2} = \sin^2 \varphi$ $\frac{y^2}{Y^2} + \frac{x^2}{X^2} - \frac{2xy}{XY} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi$	1 1	**2**
I.b) X=2, Y=3 alegem punctul B x=2sin ωt=2 y=3sin$(\omega t + \varphi)$=-3 ωt=π/2 + 2kπ => sin$(\omega t + \varphi)$=-1 => $\omega t + \varphi$= 3 π/2+ 2k’π => π/2 + 2kπ + φ = 3 π/2+ 2k’π => φ = π+ 2k’’π = (2k’’+1) π $x = 2 \sin \omega t$ $y = 3 \sin(\omega t + \pi)$	1 1	**2**
I.c) φ= $\pi/2$ $\frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1$  	1	**2**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

φ = 0; $\frac{y^2}{3^2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{2xy}{6}=0 \Leftrightarrow (\frac{y}{3}-\frac{x}{2})^2=0 \Leftrightarrow$ y=3x/2 	1	
II.a) B= $B_1+B_2+B_3=0+\frac{\mu_0 I}{4r}+\frac{\mu_0 I}{4\pi r}=\frac{\mu_0 I}{4r}(1+\frac{1}{\pi})$, deoarece primul conductor liniar e coliniar cu punctul O, al doilea conductor este un semicerc si din motive de simetrie este doar jumătate din inductia produsă de o spiră în centrul ei, al treilea conductor este jumătate dintr-un conductor liniar infinit in ambele sensuri cu punctul O aflat la distanta r de el.	1	
II.b) B= $B_1+B_2=0+\frac{\mu_0 I}{8r}+0+0+\frac{\mu_0 I}{8r}+0=\frac{\mu_0 I}{4r}$, similar a) conductorii liniari nu produc câmp în punctul O fiind coliniari cu el, rămân doar cele două arce de un sfert de cerc	1	**3**
II.c) B= $B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}+\frac{\mu_0 I}{4r}+\frac{\mu_0 I}{4\pi r}=\frac{\mu_0 I}{4r}(1+\frac{2}{\pi})$, similar a) conductrii liniari produc fiecare jumătate dintr-un conductor liniar infinit în ambele sensuri cu punctul O aflat la distanta r de ei, a doua porţiune e un conductor de forma unui semicerc si din motive de simetrie este doar jumătate din inductia produsă de o spiră în centrul ei	1	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subiect 3	**Parţial**	**Punctaj**
2. Barem subiect 3		**10**
a) Firul se alungeşte uniform în raport cu lungimea lui astfel încât distanţa x dintre două puncte creşte la fel în timpul Δt oricare ar fi cele două puncte. $\Delta x = \frac{\ell - \ell_0}{n}$; $v_1 = \frac{\ell - \ell_0}{n \cdot \Delta t}$ $v_n = \frac{\ell - \ell_0}{\Delta t}$; $\frac{v_n}{v_1} = n$	1	**1**
b) Asupra corpului care are poziţia i acţionează greutatea acestuia şi forţele elastice ale celor două resorturi cu care interacţionează: $\frac{m}{N} a_i = \frac{m}{N} g + F_{i+1} - F_i$ $\frac{m}{N} a_i = \frac{m}{N} g + Nk[y_{i+1}(x,t) - y_i(x,t) - \frac{\ell}{N}] - Nk[y_i(x,t) - y_{i-1}(x,t) - \frac{\ell}{N}]$	1	**1**
c) Soluţia ecuaţiei precedente este de forma $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ $y_0(x)$ reprezintă coordonata corpului i în starea de echilibru mecanic La echilibru mecanic $a_0 = 0$ rezultă $g = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x)$ Din $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ rezultă $y''(t) = y_0''(t) - \omega^2 A(x)\cos(\omega t)$ Substituind soluţia în ecuaţia $a_i = g + \frac{k\ell^2}{m} y_i''(x,t)$ şi ţinând seama de condiţiile găsite pentru starea de echilibru mecanic: $y_0''(t) = 0$ şi $g = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x)$ rezultă $-\omega^2 A(x)\cos(\omega t) = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) + \frac{k\ell^2}{m} y_i''(x)$ rezulta $-\omega^2 A(x)\cos(\omega t) = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) + \frac{k\ell^2}{m} A_i''(x)\cos(\omega t) + \frac{k\ell^2}{m} y_0''(x)$ rezultă $\omega^2 A(x) + \frac{k\ell^2}{m} A''(x) = 0$ Observaţie: Se va considera suficient, acordând punctajul maxim şi dacă se scrie: $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ $a_i = -\omega^2 A(x)\cos(\omega t)$ $y''(x,t) = \mathrm{A}''(\mathrm{x})\cos(\omega \mathrm{t}) + \mathrm{y}_0''(x)$ şi înlocuind în ecuaţia din enunţ rezultă $\omega^2 A(x) + \frac{k\ell^2}{m} A''(x) = 0$ şi $g + \frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) = 0$	1 1	**2**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

d) Asupra corpului N, cuplat cu corpul de masă M acţionează greutatea şi forţa elastică a resortului N: $(\frac{m}{N}+M)a_i=\frac{m}{N}g+Mg-Nk[y_N(x,t)-y_{N-1}(x,t)-\frac{\ell}{N}]$ $Ma_i+\frac{m}{N}a_i=Mg+\frac{m}{N}g-k\ell y'_N(x)+k\frac{\ell^2}{N}y''_N(x)+k\ell$ Cum $a_i=g+\frac{k\ell^2}{m}y''_i(x,t)$ rezultă $\frac{m}{N}a_i=\frac{m}{N}g+\frac{k\ell^2}{N}y''_i(x)$ pentru orice i rezulta: $Ma_N=Mg-k\ell y'_N(x)+k\ell$	1	
Substituind soluţia $y(x,t)=y_0(x)+A(x)\cos(\omega t)$ în ecuaţia precedentă rezultă: $-\omega^2A(x)\cos(\omega t)=g-\frac{k\ell}{M}y'_0(x)-\frac{k\ell}{M}A'(x)\cos(\omega t)+\frac{k\ell}{M}$ În poziţia de echilibru la $x=\ell$ rezultă $0=g-\frac{k\ell}{M}y'_0(\ell)+\frac{k\ell}{M}$ Pentru $x=\ell$ şi la $t=0$ rezultă $-\omega^2A(\ell)=g-\frac{k\ell}{M}y'_0(\ell)+\frac{k\ell}{M}-\frac{k\ell}{M}A'(\ell)\ \Rightarrow\ \omega^2A(\ell)=\frac{k\ell}{M}A'(\ell)$	1	**2**
e) $A(x)=C_1\cdot\cos(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}}\frac{1}{\ell}\cdot x)+C_2\cdot\sin(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}}\frac{1}{\ell}\cdot x)$ $A(0)=0\ \Rightarrow\ C_1=0$ deoarece capătul fixat nu oscilează	1	
$A(\ell)=C_2\cdot\sin(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}}\frac{1}{\ell}\cdot x)$ şi $\omega^2A(\mathrm{x})=\frac{k\ell}{M}A'(\mathrm{x})$ rezultă $\sqrt{\frac{m}{k}}\omega tg(\sqrt{\frac{m}{k}}\omega)=\frac{m}{M}$	1	
$\frac{m}{M}\ll1$ rezultă $tg(\sqrt{\frac{m}{k}}\omega)=\sqrt{\frac{m}{k}}\omega+\frac{1}{3}\frac{m}{k}\sqrt{\frac{m}{k}}\omega^3$ rezultă $\frac{m}{k}\omega^2(1+\frac{1}{3}\frac{m}{k}\omega^2)=\frac{m}{M}$ Rezolvând ecuația bipătrată în ω^2 se obține soluția $\omega^2=\frac{k}{M}(1-\frac{1}{3}\frac{m}{M})$ Alternativ, deoarece $\frac{m}{k}$ foarte mic rezultă $\frac{1}{1-\frac{1}{3}\frac{m}{k}\omega^2}\simeq1+\frac{1}{3}\frac{m}{k}\omega^2$ Inlocuind rezultă $\omega^2=\frac{k}{M}(1-\frac{1}{3}\frac{m}{M})$	1	**3**
Oficiu		**1**

Barem propus de:
Prof. Cristinel Miron, Colegiul Naţional”Emil Racoviță”, Iași
Prof. Marian Viorel Anghel, Liceul Teoretic ”Petre Pandrea”, Balş
Prof. Victor Stoica, Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.