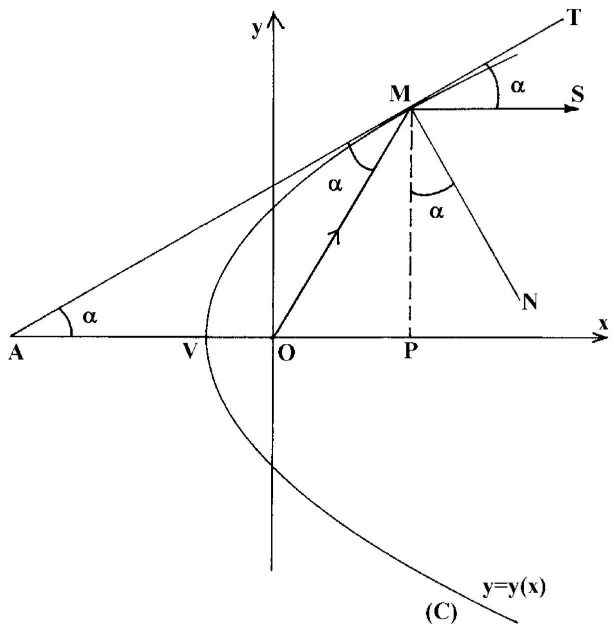
REZOLVARE

A. Fie $M(x, y)$ un punct oarecare de pe curba (C) care, prin rotație în jurul axei Ox, generează suprafața oglinzii. Desenăm tangenta MA şi normala MN. Unghiul α format de tangentă cu dreapta AOP (axa Ox) este dat de relația $tg\alpha = y' \equiv \frac{dy}{dx}$. Pe de altă parte, unghiul $PMN = \alpha$ ca unghiuri cu laturile reciproc perpendiculare. După ce raza de lumină OM se reflectă în M, raza de lumină MS, se propagă pe o direcție paralelă cu Ox astfel că unghiul $TMS = \alpha$.



În punctul M legea reflexiei este satisfăcută dacă unghiul $OMA =$ unghiul $SMT = \alpha$ (ca unghiuri față de tangentă). Atunci, unghiurile complementare (față de normală), adică unghiul NMO şi unghiul NMS, vor fi şi ele egale şi legea reflexiei este satisfăcută. Tragem concluzia că triunghiul AMO este isoscel cu $|AO| = |OM|$. Acum putem scrie $AO = AP - OP$ şi $tg\alpha = MP/AP = y/AP$, adică $AP = y/tg\alpha = y/y'$, respectiv $OP = x$. Aşadar $AO = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = (y/y') - x$, care poate fi scrisă sub forma

$$ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0 \quad . \qquad (*)$$

În locul lui x introducem o nouă variabilă $u = \frac{x}{y}$, astfel că $x = uy$ şi $dx = udy + ydu$.

Ecuația (*) devine $ydu = \sqrt{1 + u^2}dy$ care, are variabilele separate: $\frac{dy}{y} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$ şi prin integrare ne dă, $\ln y = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} + \ln C$. Notăm $u = sh\, q = \frac{1}{2}(e^q - e^{-q})$, $\sqrt{1 + u^2} = ch\, q$, $du = (ch\, q)dq$ şi astfel găsim $\ln(\frac{y}{C}) = \int dq = q = argsh\, u = argsh\,(x/y)$. Avem în vedere că $2sh\, q = e^q - \frac{1}{e^q}$ sau $e^{2q} - 2(sh\, q)e^q - 1 = 0$, adică

$e^q = \mathrm{sh}\, q + \sqrt{(\mathrm{sh}\, q)^2 + 1} = u + \sqrt{u^2 + 1}$ sau $q = \ln[u + \sqrt{u^2 + 1}]$. Acum putem scrie soluția sub forma $\ln(\frac{y}{C}) = \ln[u + \sqrt{u^2 + 1}]$ adică

$$y = C\left[\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}\right] \text{ sau } y^2 = 2C(x + \frac{C}{2}). \qquad (**)$$

Aceasta este ecuația unei parabole cu v`rful în punctul $(x_V = -\frac{C}{2}, y_V = 0)$ şi cu parametrul C. Conform enuntului d este diametrul oglinzii (în direcție perpendiculară pe Ox) iar h este ad`ncimea oglinzii (în direcție longitudinală). Vom cere ca punctul $(x = h - \frac{C}{2}, y = \frac{d}{2})$ să se afle pe oglindă (în extremitatea superioară), adică să satisfacă ecuația (**). Obținem $C = \frac{d^2}{8h}$. Ecuația parabolei are acum forma

$$y^2 = \frac{d^2}{4h}(x + \frac{d^2}{16h}),$$

iar distanța focală a oglinzii este $f = \frac{C}{2} = \frac{d^2}{16h}$.

B.. Orice electron din fascicul interacționează cu imaginea sa electrostatică, formându-se un dipol electric cu moment dipolar variabil în timp cu perioada $T' = d'/v$ (în referențialul legat de electron). Aici, din cauza contracției lungimilor, $d' = d\sqrt{1-\beta^2}, \beta = v/c$. Corespunzător, frecvența radiației emise (radiație dipolar – electrică) este $\nu' = 1/T' = v/d' = \frac{v}{d\sqrt{1-\beta^2}}$. Emițătorul fiind în mişcare, observatorul din referențialul exterior va percepe o frecvență diferită de ν', dată de formula efectului Doppler:

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} = \frac{v/d}{1-\left(\frac{v}{c}\right)\cos\theta}.$$

b. Lungimea de undă observată când se priveşte pe direcția θ este

$$\lambda = c/\nu = \frac{cd}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) = d\left(\frac{c}{v} - \cos\theta\right).$$

c. În aplicația numerică, luând β = 1, găsim λ = 586 nm.

d. Pentru λ = 400 nm rezultă $\theta = 36{,}87^0$, iar pentru λ = 700 nm rezultă $\theta = 49{,}46^0$