PROBA DE BARAJ - 8 aprilie 2004

SOLUTIA PENTRU PROBLEMA DE MECANICA

a) Daca la un moment oarecare, *t*, din evolutia sistemului, cand distanta dintre stele este *r* si rezultatul interactiunii lor gravitationale este $F = K\frac{mM}{r^2}$, atunci, dupa un timp elementar d*t*, in care deplasarile elementare ale celor doua stele in raport cu centrul de masa, sunt d*X* si respective d*x*, cand se poate admite ca *F* = constant, inacord cu principiul fundamental al dinamicii si cu legea atractiei gravitationale, avem:

$$M\vec{a}_1 = \vec{F}; Ma_1 = F; m\vec{a}_2 = -\vec{F}; ma_2 = F;$$

$$a_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right) > 0; dX < 0; a_2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) > 0; dx < 0;$$

$$-M\frac{d^2X}{dt^2} = K\frac{mM}{r^2}; -m\frac{d^2x}{dt^2} = K\frac{mM}{r^2}; X + x = r;$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -K\frac{m+M}{r^2}; r = \rho r_0;$$

$$0 \le \rho \le 1;$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -K\frac{m+M}{r_0^3}\frac{1}{\rho^2}; K\frac{m+M}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{T_0^2};$$

$$t_{cadere} = \frac{1}{2}\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{2K(m+M)}}.$$

b) In conditiile unei viteze initiale corespunzatoare (ca orientare si modul), in raport cu centrul pamantului, miscarea rachetei balistice intercontinentale se face in conformitate cu legile lui Kepler, astfel incat traiectoria sa intercontinentala este un sector dintr-o elipsa, avand centrul pamantului in unul din focarele sale.
Miscarea intercontinentala a rachetei balistice este efectul fortei centrale de atractie gravitational ape care pamantul o exercita asupra sa (miscare intr-un camp gravitational neuniform).
Chiar si in cazul miscarii unui proiectil de artilerie, realizata la altitudine joasa, neglijand frecarera cu aerul, traiectoria acestuia este tot un sector dintr-o elipsa.
Daca, inb acest caz, forta de atractie gravitationala poate fi considerate un vector constant, miscarea proiectilului facandu-se intr-un camp gravitational uniform, atunci traiectoria este un sector dintr-o parabola, care aproximeaza foarte bine un secor dintr-o elipsa.

c)In apa la adancimea *x*, in punctele de pe suprafata sferei cu raza *R*-*x* si cu masa *m*, acceleratia gravitationala este:

$$g = K\frac{m}{(R-x)^2}; m = M - \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - (R-x)^3\right]\rho;$$

$$g = K\frac{M - \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - (R-x)^3\right]\rho}{(R-x)^2},$$

Expresie adevarata numai pentru $x << R$, deoarece nu toata planeta este constituita din apa.

Exista o valoare limita a masei planetei, astfel incat pentru valori superioare ale acesteia acceleratia gravitationala creste, iar pentru valori inferioare ale acesteia acceleratia gravitationala scade.

Valoarea acestei mase limita corespunde cazului cand in apa, in imediata aproiere a suprafetei ocaenuluiu planetar, acceleratia gravitationala variaza cel mai putin, adica practice ramane constanta si egala cu aceea de la suprafata planetei:

$$g_0 = K\frac{M}{R^2},$$

Unde M este valoarea limita a masei planetei, corespunzator careia acceleratia gravitationala nu variaza imediat dupa scufundare.

Din conditia $g \approx g_0$, cand $x << R$,rezulta:

$$M = 2\pi\rho R^3; g_0 = 2\pi\rho K R.$$