Ministerul Educației şi Cercetării

Olimpiada Națională de Fizică

Drobeta – Turnu Severin

8 aprilie 2004

Proba de baraj- soluție

Baraj

Electricitate

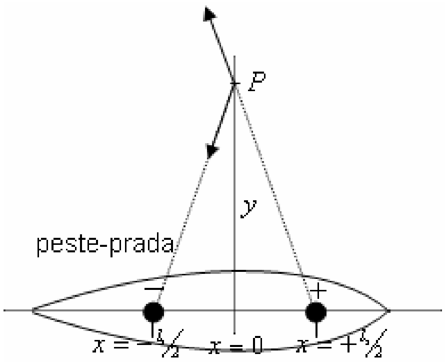
a. Când sursa de curent cu intensitatea I_s se află în mediu izotrop omogen şi infinit, vectorul densitate de curent la distanța r de punctul sursă este

$$\vec{j} = \frac{I_s}{4\pi r^3}\vec{r} \qquad (1)$$

Unde caracterul vectorial (cu distribuție radială) este esențial

b. Dacă se presupune că rezistivitatea corpului peştelui şi a apei în care acesta se află este aceeaşi, nu mai sunt necesare condiții la limită speciale la suprafața care separă peştele de apă. În acest caz, cele două sfere care modelează peştele sunt cufundate într-un mediu izotrop cu rezistivitatea ρ. Când o sferă mică produce curentul I_s, conform punctului anterior densitatea de curent la distanța r de sferă este dată de expresia (1). Expresia corespunzătoare a intensității câmpului electric este

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \rho\vec{j} \\ \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho I_s}{4\pi r^3}\vec{r} \end{cases} \qquad (2)$$



În model sunt două sfere mici – una la potențial pozitiv şi alta la potențial negativ. Curentul I_s curge de la sfera pozitivă spre sfera negativă . Sferele sunt separate prin distanța l_s. În sistemul de referință din figură intensitatea câmpului în P(0,y) este:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$= \frac{\rho I_s}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(\left(\frac{l_s}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{l_s}{2}i + yj\right) + \frac{1}{\left(\left(\frac{l_s}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{l_s}{2}i - yj\right)\right] \qquad (3)^*$$

$$= \frac{\rho I_s}{4\pi}\left[\frac{l_s(-i)}{\left(\left(\frac{l_s}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$\vec{E}_p \approx \frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3}(-i)$ pentru ls << y

c. Intensitatea câmpului electric de-a lungul axei pe care se află cele două sfere sursă are expresia

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho I_s}{4\pi}\left(\frac{1}{\left(x - \frac{l_s}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{l_s}{2}\right)^2}\right)(-i) \qquad (4)$$

Diferența de potențial care produce curentul I_s este deci

$$V_s = \Delta V = V_+ - V_- = -\int_{\left(-\frac{l_s}{2}+r_s\right)}^{\left(\frac{l_s}{2}-r_s\right)} \vec{E}(x).d\vec{x} = -\frac{\rho I_s}{4\pi}\int\left(\frac{1}{\left(x - \frac{l_s}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{l_s}{2}\right)^2}\right)(-i).(idx)$$

$$V_s = \frac{\rho I_s}{4\pi}\left(\frac{2}{r_s} - \frac{2}{l_s - r_s}\right) = \frac{2\rho I_s}{4\pi}\left(\frac{l_s - r_s - r_s}{(l_s - r_s)r_s}\right) = \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}\left(\frac{l_s - 2r_s}{l_s - r_s}\right) \qquad (5)^*$$

$V_s = \Delta V \approx \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}$ for $l_s >> r_s$.

Iar rezistența dintre cele două sfere sursă este

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{\rho}{2\pi r_s} \qquad (6)^*$$

d. V este diferența de potențial dintre pozițiile celor două sfere ale detectorului datorată câmpului electric produs de pradă, R_m este rezistența internă datorată mediului în care se petrece detecția. V_d și R_d sunt respectiv diferența de potențial dintre sferele detectoare și rezistența elementului detector reprezentat de prădător iar i_d este curentul care curge prin circuitul apărut în procesul detecției.

Analog cu situația rezistenței dintre cele două sfere sursă , rezistența mediului de rezistivitate ρ între sferele detectoare de raze r_d este:

$$R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d} \qquad (7)^*$$

Cum l_d este mult mai mic decât y, intensitatea câmpului electric între sfere poate fi presupusă constantă şi

$$E = \frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \qquad (8)$$

Rezultă că, diferenţa de potenţial dintre punctele în care se află sferele detectoare este

$$V = El_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \qquad (9)$$

iar diferenţa de potenţial dintre sferele detectoare este

$$V_d = V\frac{R_d}{R_d + R_m} = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}\frac{R_d}{R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d}} \qquad (10)^*$$

e. Conform figurii

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} - \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM}\right] \qquad (11)$$

Din $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ rezultă $(AM)^2 = r^2 - 2ra\cos\theta + a^2$ şi deci

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + ...\right]. \ (12)$$

Pentru BM folosim aceeaşi formula cu $\theta \to \pi - \theta$ iar pentru CM şi DM vom face ca θ să treacă în $\frac{\pi}{2} \mp \theta$. Avem

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + ...\right], \qquad (13)$$

$$\frac{1}{CM} \approx \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\sin\theta + \frac{a^2}{2r^2}\left(3\sin^2\theta - 1\right) + ...\right], \qquad (14)$$

$$\frac{1}{DM} \approx \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\sin\theta + \frac{a^2}{2r^2}\left(3\sin^2\theta - 1\right) + ...\right]. \qquad (15)$$

Finalmente obţinem

$$V(r) \approx k\frac{\cos(2\theta)}{r^3}, \qquad (16)$$

unde $k \equiv \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0}$.

Câmpul electric din planul xOy este $\vec{E} = -(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y})$ unde şl vom scrie pe $V(r)$ sub forma

$$V(x,y) = k\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \qquad (17)$$

Avem $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{kx}{r^7}(7y^2 - 3x^2)$ şi $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{ky}{r^7}(3y^2 - 7x^2)$.

Componentele câmpului electric sunt:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial x}\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial y}\sin\theta = \frac{3k}{r^4}\cos(2\theta)\ , \qquad (18)$$

(componenta radială) respectiv

$$E_\theta = \frac{\partial V}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\theta = \frac{2k}{r^4}\sin(2\theta), \qquad (19)$$

(componenta transversală).

Liniile de câmp au proprietatea că sunt tangente la vectorul $\vec{E}$ în orice loc din spatiu (sau $\vec{E}$ este pe direcția tangentei la liniile de câmp în orice loc din spațiu). Aceasta înseamnă anularea produsului vectorial $\vec{E}$ x $d\vec{s}$, cu $d\vec{s} =$ element de arc pe curba numită "linie de câmp". Putem scrie

$$(\vec{1}_r \cdot E_r + \vec{1}_\theta \cdot E_\theta) x (\vec{1}_r \cdot dr + \vec{1}_\theta \cdot rd\theta) = 0,$$

adică

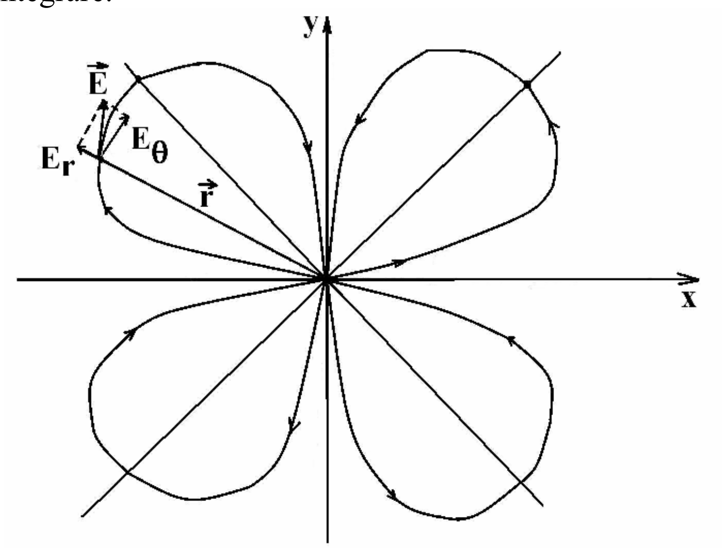
$$E_r(rd\theta) = E_\theta \cdot dr.$$

Aşadar $\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta = \frac{3}{2}ctg(2\theta)\cdot d\theta$

Prin integrare obținem

$$r = C[|\sin(2\theta)|]^{3/4}, \qquad (20)p$$

C fiind o constantă de integrare.



Valorile maxime ale lui r se obțin pentru $\theta = 45^0, 135^0, 225^0 315^0$ (adică în lungul bisectoarelor 1 şi 2). Deci liniile de câmp sunt rozete cu patru foi – vezi figura. Desigur considerentele sunt valabile doar la distanțe mari față de distribuția de sarcini.