Subiect	**Parţial**	**Punctaj**
1. Subiect 1, total:		**10**
a) Rezistenţa echivalentă a celor n becuri conectate în paralel este R/n, de unde rezultă expresia intensităţii curentului prin sursă: $I=\dfrac{E}{r+r_i+\dfrac{R}{n}}$.	1	**3**
Puterea consumată de toate becurile este: $P_n=\left(\dfrac{R}{n}\right)I^2=\left(\dfrac{R}{n}\right)\dfrac{E^2}{\left(r+r_i+\dfrac{R}{n}\right)^2}$	1	
şi puterea consumată de un singur bec: $P_1=\dfrac{P_n}{n}=\left(\dfrac{R}{n^2}\right)\dfrac{E^2}{\left(r+r_i+\dfrac{R}{n}\right)^2}$ care poate fi exprimată în mod echivalent sub forma: $P_1=\dfrac{E^2}{R}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{r+r_i}{R}n\right)^2}$.	1	
b)		**4**
b1. Cazul $\dfrac{R}{n}\ll r+r_i$ (număr mare de becuri). În formula $P_1=\left(\dfrac{R}{n^2}\right)\dfrac{E^2}{\left(r+r_i+\dfrac{R}{n}\right)^2}$ se poate neglija la numitor termenul $\left(\dfrac{R}{n}\right)$ faţă de $\left(r+r_i\right)$ şi se obţine: $P_1\cong\left(\dfrac{R}{n^2}\right)\dfrac{E^2}{\left(r+r_i\right)^2}$ care este în acord cu expresia găsită de Preece.	1	
b2. Cazul $\dfrac{R}{n}\cong r+r_i$. Sistemul este în apropierea regimului de transfer maxim de putere pe reţeaua de becuri. Transferul de putere este maxim când $\dfrac{R}{n}=r+r_i$. Dacă înlocuim în expresia $P_1=\dfrac{E^2}{R}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{r+r_i}{R}n\right)^2}$, găsim: $P_1=P_{1,\text{maxim}}=\dfrac{E^2}{4R}$.	1	

Subiect	Parțial	Punctaj
b3. Cazul $\frac{R}{n} \gg r+r_i$ (număr mic de becuri). În formula $P_1=\left(\frac{R}{n^2}\right)\frac{E^2}{\left(r+r_i+\frac{R}{n}\right)^2}$ se poate neglija la numitor termenul $\left(r+r_i\right)$ față de $\left(\frac{R}{n}\right)$ şi se obține: $P_1 \cong \frac{E^2}{R}$ care este independentă de n.	1	
Concluzie: Formula lui Preece se poate aplica cu suficientă precizie doar pentru rețele care conțin un număr mare de becuri $n \gg \frac{R}{r+r_i}$.	1	
c) Tensiunea pe orice bec din rețea este dată de: $U_b=\left(\frac{R}{n}\right)\frac{E}{r+r_i+\frac{R}{n}}=\frac{E}{1+n\frac{r+r_i}{R}} \Rightarrow n=\left(\frac{E}{U_b}-1\right)\frac{R}{r+r_i}$.	0,5	1
Pentru $U_b=100V \Rightarrow n_1=480 \text{ becuri}$. Pentru $U_b=120V \Rightarrow n_2=333,33$. Observăm că tensiunea pe becuri scade cu creşterea numărului de becuri, ceea ce înseamnă că trebuie să alegem $n_2=334 \text{ becuri}$. Condițiile optime de funcționare sunt în acest caz îndeplinite pentru un număr de becuri în rețea cuprins între 334 şi 480 de becuri.	0,5	
d) Becurile moderne au rezistența $R_M=\frac{U_M^2}{P_M}=960\Omega$.	0,5	1
Pentru a asigura funcționarea în regim de transfer maxim de putere pe consumatorul extern a sursei avem: $\frac{R_M}{n'}=r+r_i \Rightarrow n'=\frac{R_M}{r+r}=1920$ becuri.	0,5	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

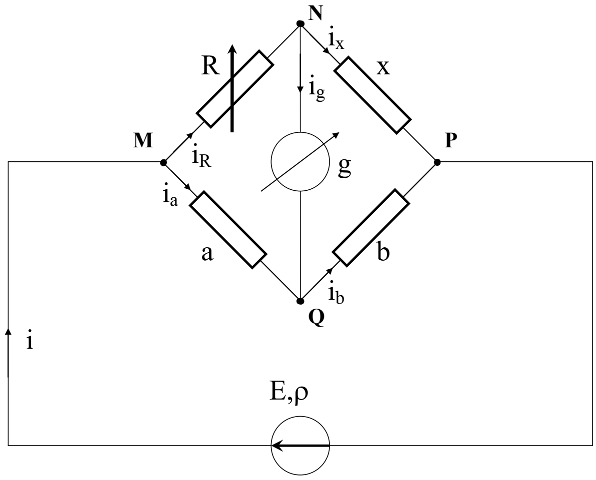
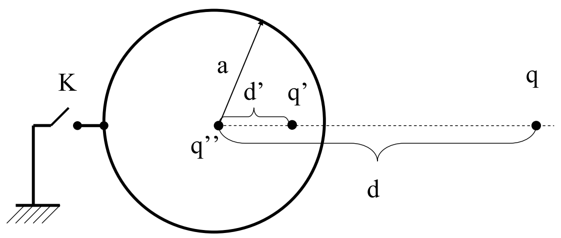
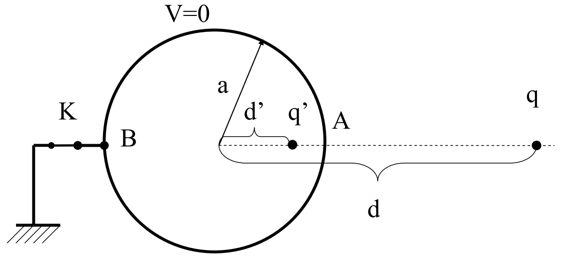
<table>
<tr><td>2. Subiect 2, total:</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a) 

Fig. 2s</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Folosim notațiile din figura 2s
Din condiția $i_g = 0$ rezultă că $i_R = i_x$ şi $i_a = i_b$. Din legea a doua lui Kirchhoff pentru ochiul de rețea MNQ rezultă $Ri_R - ai_a = 0$ iar pentru ochiul de rețea NPQ, $xi_x - bi_b = 0$. Utilizând aceste relații, obținem:
$$\begin{cases} Ri_R = ai_a \\ xi_x = bi_b \\ i_R = i_x \\ i_a = i_b \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = R\frac{b}{a}.$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b) Domeniul de valori ale rezistenței R pentru care curentul prin galvanometru este mai mic decât valoarea limita i_0 se obține din condiția: $\left|i_g\right| < i_0$.</td><td>1</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>Pentru a determina expresia curentului prin galvanometru scriem legile lui Kirchhoff pentru circuit în cazul general:
$$\begin{cases} E = Ri_R + xi_x \\ 0 = Ri_R - ai_a \\ 0 = xi_x - bi_b \\ i = i_R + i_a \\ i = i_x + i_b \\ i_R = i_g + i_x \end{cases}.$$</td><td>1</td></tr>
</table>

Soluția acestui sistem o reprezintă curenții $\left(i, i_R, i_x, i_a, i_b, i_g\right)$. Obținem succesiv: $i_a = i_R \dfrac{R}{a}, \quad i_b = i_x \dfrac{x}{b}$ $i = i_R\left(1+\dfrac{R}{a}\right) = i_x\left(1+\dfrac{x}{b}\right) \Rightarrow i_R = i\dfrac{a}{a+R}; \quad i_x = i\dfrac{b}{b+x}$ $E = i\left(\dfrac{aR}{a+R}+\dfrac{bx}{b+x}\right) \Rightarrow i = E\dfrac{(a+R)(b+x)}{aR(b+x)+bx(a+R)}$ $i_g = i_R - i_x = E\dfrac{(ax-bR)}{aR(b+x)+bx(a+R)}$.	1	
Să notăm R_1 valoarea rezistenței R pentru care $i_g = +i_0$ şi R_2 valoarea rezistenței pentru care $i_g = -i_0$. Dacă înlocuim aceste notații în expresia curentului prin galvanometru, obținem: $\begin{cases} +i_0 = E\dfrac{(ax-bR_1)}{aR_1(b+x)+bx(a+R_1)} \\ -i_0 = E\dfrac{(ax-bR_2)}{aR_2(b+x)+bx(a+R_2)} \end{cases}$	1	
din care obținem expresiile pentru R_1 şi R_2: $\begin{cases} R_1 = \dfrac{ax(E-bi_0)}{b(E+ai_0)+x(a+b)i_0} \\ R_2 = \dfrac{ax(E+bi_0)}{b(E-ai_0)-x(a+b)i_0} \end{cases}$.	1	
Dacă notăm R_0 valoarea rezistenței R pentru care $i_g = 0$, observăm că putem exprima R_1 şi R_2 sub forma: $\begin{cases} R_1 = R_0\dfrac{E-bi_0}{E+\left[a+\dfrac{x(a+b)}{b}\right]i_0} < R_0 \\ R_2 = R_0\dfrac{E+bi_0}{E-\left[a+\dfrac{x(a+b)}{b}\right]i_0} > R_0 \end{cases}$.	1	
Rezultă că $R_1 < R < R_2$.	1	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

3. Subiect 3, total		**10**
3.1) Completăm semisfera din enunț cu o semisferă identică situată la dreapta originii O, formând astfel o sferă. Dacă sarcina totală de pe sferă este q, potențialul creat de sferă în A este: $V_{A,\text{sfera}} = V_{A1} + V_{A2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{1,5R}$, unde V_{A1} este potențialul necunoscut (dat de semisfera din stânga) iar V_{A2} este contribuția la potențialul total în A dat de semisfera din dreapta.	1	3
Folosind simetria problemei şi valorile din tabel se observă că $V_{A2} = V(1,5R) = 46,5V$. Valoarea potențialului unei semisfere în centrul acesteia este dat de: $V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/2}{R} = 100V$ de unde rezultă: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = 2V(0)$.	1	
Dacă se înlocuieşte în expresia potențialul creat de sferă în A, obținem: $V_{A,\text{sfera}} = V_{A1} + V(1,5R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{1,5R} = \frac{2}{3}2V(0) \Rightarrow$ $V_{A1} = \frac{4}{3}V(0) - V(1,5R) = \frac{4}{3}100 - 46,5 = 86,83V$	1	
3.2)		1
 Fig. 3.2s1	0,5	
 Fig. 3.2s2	0,5	

3.2a		
În prezenţa sarcinii q pe sfera conductoare apar sarcini de influenţă care asigură anularea câmpului în interiorul conductorului. În cazul în care întrerupătorul este pe poziţia deschis, sfera conductoare este izolată, sarcina totală de pe aceasta fiind zero. Potenţialul sferei este constant, dar nenul. Când întrerupătorul este pe poziţia închis, potenţialul sferei ajunge zero, datorită legăturii la Pământ. Este mai simplu să calculăm sistemul echivalent de sarcini (punctiforme) care asigură condiţia de potenţial nul pe sfera conductoare. Se calculează mărimea şi poziţia unei sarcini electrice punctiforme q' aflate la distanţa d' de centrul sferei care, împreună cu sarcina q asigură condiţia $V=0$ pe orice punct de pe sferă. Este suficient să impunem condiţia de potenţial nul în punctele A şi B (vezi figura 3.2s2). Se obţine: $\begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(d-a)}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(a-d')}=V_A=0 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(d+a)}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(a+d')}=V_B=0 \end{cases}$	1	
de unde rezultă succesiv: $\begin{cases} \frac{q}{(d-a)}=-\frac{q'}{(a-d')} \\ \frac{q}{(d+a)}=-\frac{q'}{(a+d')} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(d+a)}{(d-a)}=\frac{(a+d')}{(a-d')} \\ q'=-q\frac{(a-d')}{(d-a)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'=\frac{a^2}{d} \\ q'=-q\frac{a}{d} \end{cases}.$	1	**3**
Sarcina q' este chiar sarcina totală de influenţă deoarece aceasta, împreună cu sarcina q, creează acelaşi câmp în exteriorul sferei conductoare ca şi sistemul real (q şi sarcini de influenţă). În consecinţă, dacă aplicăm teorema lui Gauss pentru o sferă având raza cu puţin mai mare decât a ar trebui pentru ambele sisteme să obţinem acelaşi flux, adică sarcina totală interioară acestei sfere ar trebui să fie aceiaşi în ambele cazuri.	1	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

3.2b		
Când sfera este izolată (înainte de închiderea circuitului), sarcina totală de pe aceasta este nulă iar potenţialul este nenul. Pentru a asigura un astfel de potenţial pe sferă, se adaugă încă o sarcină în sistemul echivalent, sarcina q'' poziţionată chiar în centrul sferei. După cum se ştie o astfel de sarcină va asigura un potenţial diferit de zero şi constant pe sferă. Valoarea sarcinii q'' se determină din proprietatea că sarcina totală de influenţă, pe sferă, este nulă. Se ştie că atât sistemul format din sarcina q şi sarcinile de influenţă, respectiv sistemul echivalent (q, q', q'') produc acelaşi câmp electric în afara sferei. Dacă se aplică teorema lui Gauss pentru o sferă de rază cu puţin mai mare decât a, fluxul total prin aceasta trebuie să fie nul (sferă izolată, deci cu sarcina totală zero). Aceasta este valabil şi pentru sistemul real cât şi pentru sistemul echivalent. Dacă pentru sistemul echivalent fluxul total este zero, rezultă că sarcina totală din interiorul sferei (de rază cu puţin mai mare decât a) este tot zero. Rezultă că: $q' + q'' = 0 \Rightarrow q'' = -q' = q\dfrac{a}{d}$.	1	**2**
Se calculează forţele care acţionează asupra sarcinii q în cele două situaţii (K deschis – sferă izolată, respectiv K închis – sferă la potenţial zero). Cazul K dechis: $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{(d-d')^2} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq''}{d^2}$.	0,5	
Cazul K închis: $F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{(d-d')^2}$.	0,5	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.