Foaie de răspuns I.1.A. (2 puncte)

I.1.A. Realizează un studiu teoretic în care să arăți că, după eliberare, corpul execută o succesiune de mişcări oscilatorii armonice de aceeaşi perioadă ale căror centre de oscilație se schimbă succesiv la schimbarea sensului de mişcare.

Dacă corpul se deplasează în sens negativ axei Ox şi reperul R are o coordonată oarecare x, principiul fundamental al dinamicii se scrie:

$k(x_i - x) + \mu mg - k(x_i + x) = ma$ sau: $-2kx + \mu mg = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Relația se poate scrie sub forma:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2k}{m}\left(x - \dfrac{\mu mg}{2k}\right) = 0$ **(0,5 puncte)**

şi ea indică o mişcare oscilatorie de pulsație $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ şi perioadă $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$, **(0,25 puncte)**

cu centrul de oscilație în punctul de coordonată $x = x^* = \dfrac{\mu mg}{2k}$. **(0,25 puncte)**

Dacă corpul se deplasează în sens pozitiv axei Ox şi reperul R are o coordonată x, forța de frecare îşi schimbă sensul şi principiul fundamental al dinamicii se scrie:

$k(x_i - x) - \mu mg - k(x_i + x) = ma$ sau: $-2kx - \mu mg = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Relația se poate pune sub forma:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2k}{m}\left(x + \dfrac{\mu mg}{2k}\right) = 0$ **(0,5 puncte)**

şi ea indică o mişcare oscilatorie de pulsație $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ şi perioadă $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$, **(0,25 puncte)**

cu centrul de oscilație în punctul de coordonată $x = -x^* = -\dfrac{\mu mg}{2k}$. **(0,25 puncte)**

Mişcarea corpului va fi o succesiune de mişcări oscilatorii de aceeaşi perioadă $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ în care centrul de oscilație se schimbă succesiv între punctele de coordonate $x = x^* = \dfrac{\mu mg}{2k}$ şi $x = -x^* = -\dfrac{\mu mg}{2k}$, între două opriri succesive scurgându-se un timp egal cu o jumătate de perioadă $\dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$. **(0,25 puncte)**

Foaie de răspuns I.1.B. (3 puncte)

I.1.B. Stabileşte o relaţie (1) care să exprime coordonata corpului la a n -a oprire.
Stabileşte o relaţie (2) care să exprime timpul scurs din momentul eliberării corpului până la a n -a oprire.
Precizează condiţia necesară ca a n -a oprire să fie definitivă.
Din relaţiile (1) şi (2) determină expresia care exprimă coeficientului de frecare în funcţie de x_0 , t , x_n şi n .

Pentru prima deplasare din punctul M_0 în punctul M_1 teorema variaţiei energiei se scrie:

$\frac{k}{2}(x_i + x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_i - x_1)^2 - \frac{k}{2}(x_i + x_0)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2 = -\mu mg(x_0 - x_1)$, unde am ţinut cont de valoarea negativă a coordonatei x_1.

Efectuând calculele şi simplificând prin $x_0 - x_1 \neq 0$ obţinem $x_0 + x_1 = \frac{\mu mg}{k}$ sau:

$x_0 + x_1 = 2x^*$

Pentru a doua deplasare din punctul M_1 în punctul M_2 teorema variaţiei energiei se scrie:

$\frac{k}{2}(x_i + x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_i - x_2)^2 - \frac{k}{2}(x_i + x_1)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_1)^2 = -\mu mg(-x_1 + x_2)$, care conduce la:

$x_1 + x_2 = -2x^*$

La fel găsim:

$x_2 + x_3 = 2x^*$

....

$x_{n-1} + x_n = (-1)^{n-1} 2x^*$

Înmulţind relaţiile de ordin impar cu (-1) şi adunându-le cu cele de ordin par, găsim:

- pentru n par: $x_n - x_0 = -2nx^*$ sau $x_n = x_0 - 2nx^*$
- pentru n impar: $-x_n - x_0 = -2nx^*$ sau $x_n = -x_0 + 2nx^*$

Putem scrie deci:

$x_n = (-1)^n \left(x_0 - 2nx^*\right)$. **(1,5 puncte)**

Relaţia de mai sus poate fi găsită mai uşor, observând că, la fiecare schimbare a sensului de oscilaţie, modulul coordonatelor la care se opreşte reperul scade cu $2x^*$.

Pentru ca a n -a oprire să fie oprirea definitivă trebuie ca:

$\left|k(x_i - x_n) - k(x_i + x)\right| \leq \mu mg$ sau:

$-x^* \leq x_n \leq x^*$. **(0,25 puncte)**

Admiţând această condiţie îndeplinită $x_n = (-1)^n \left(x_0 - 2kx^*\right)$ va reprezenta coordonata la care corpul se opreşte definitiv şi de aici:

$x^* = \frac{\mu mg}{2k} = \frac{x_0 - (-1)^n x_n}{2n}$. **(0,5 puncte)**

Timpul scurs din momentul eliberării corpului şi până la oprirea sa definitivă va fi:

$t = n\frac{T}{2} = \pi \cdot n\sqrt{\frac{m}{2k}}$, **(0,25 puncte)**

de unde:

$\frac{m}{2k} = \left(\frac{t}{\pi \cdot n}\right)^2$ şi înlocuind se obţine: $\mu g\left(\frac{t}{\pi \cdot n}\right)^2 = \frac{x_0 - (-1)^n x_n}{2n}$,

de unde:

$\mu = \frac{\pi^2 n\left[x_0 - (-1)^n x_n\right]}{2gt^2}$. **(0,5 puncte)**

Foaie de răspuns I.1.C. (1,25 puncte)

I.1.C. Completează tabelul 1 cu mărimile determinate experimental în cele 5 determinări, calculează coeficientul de frecare pentru fiecare şi valoarea medie a acestuia.

Pentru valorile rezultate din măsurări: **0,1 puncte/determinare**.
Pentru calculul coeficientului de frecare: **0,1 puncte/determinare**.
Pentru calculul valorii medii a coeficientului de frecare: **0,25 puncte**

Tabel 1.

Nr. det.	$x_0(m)$	$t(s)$	$x_n(m)$	n	μ	μ_{mediu}
1.	0,15	1	-0,01	6	**0,48**	**0,47**
2.	0,13	0,9	-0,015	6	**0,53**	
3.	0,11	0,7	-0,008	5	**0,52**	
4.	0,09	0,55	-0,014	3	**0,37**	
5.	0,07	0,4	0	2	**0,43**	

Foaie de răspuns I.2.A. şi I.2.B. (2 puncte)

I.2.A. Găseşte relaţia care exprimă distanţa d parcursă de corp din momentul eliberării şi până la oprirea definitivă în funcţie de x_0, x_n şi n.

I.2.B. Completează tabelul 2 cu mărimile determinate experimental şi calculează distanţa d folosind relaţia găsită.

Distanţa totală parcursă de corp din momentul eliberării la coordonata x_0 şi momentul opririi la coordonata x_n se poate determina aplicând teorema variaţiei energiei mecanice între cele două momente:

$$\frac{k}{2}(x_i + x_n)^2 + \frac{k}{2}(x_i - x_n)^2 - \frac{k}{2}(x_i + x_0)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2 = -\mu mgd \text{ sau:}$$

$$k\left(x_n^2 - x_0^2\right) = -\mu mgd \text{ , de unde:}$$

$$d = \frac{k\left(x_0^2 - x_n^2\right)}{\mu mg}$$ **(0,5 puncte)**

şi înlocuind expresia găsită pentru coeficientul de frecare $\mu = \dfrac{\pi^2 n\left[x_0 - (-1)^n x_n\right]}{2gt^2}$ se obţine:

$$d = n\frac{x_0^2 - x_n^2}{x_0 - (-1)^n x_n} = n\left[x_0 + (-1)^n x_n\right].$$ **(0,5 puncte)**

Tabel 2.

Nr. det.	$x_0(m)$	$x_n(m)$	n	d
1.	0,15	-0,01	6	**0,840**
2.	0,13	-0,015	6	**0,690**
3.	0,11	-0,008	5	**0,590**
4.	0,09	-0,014	3	**0,312**
5.	0,07	0	2	**0,140**

Pentru calculul distanţei: **0,2 puncte/determinare**.

Surse de erori **(0,5 puncte)**

Minimum 5 surse semnificative de erori: **0,1 puncte/sursă**

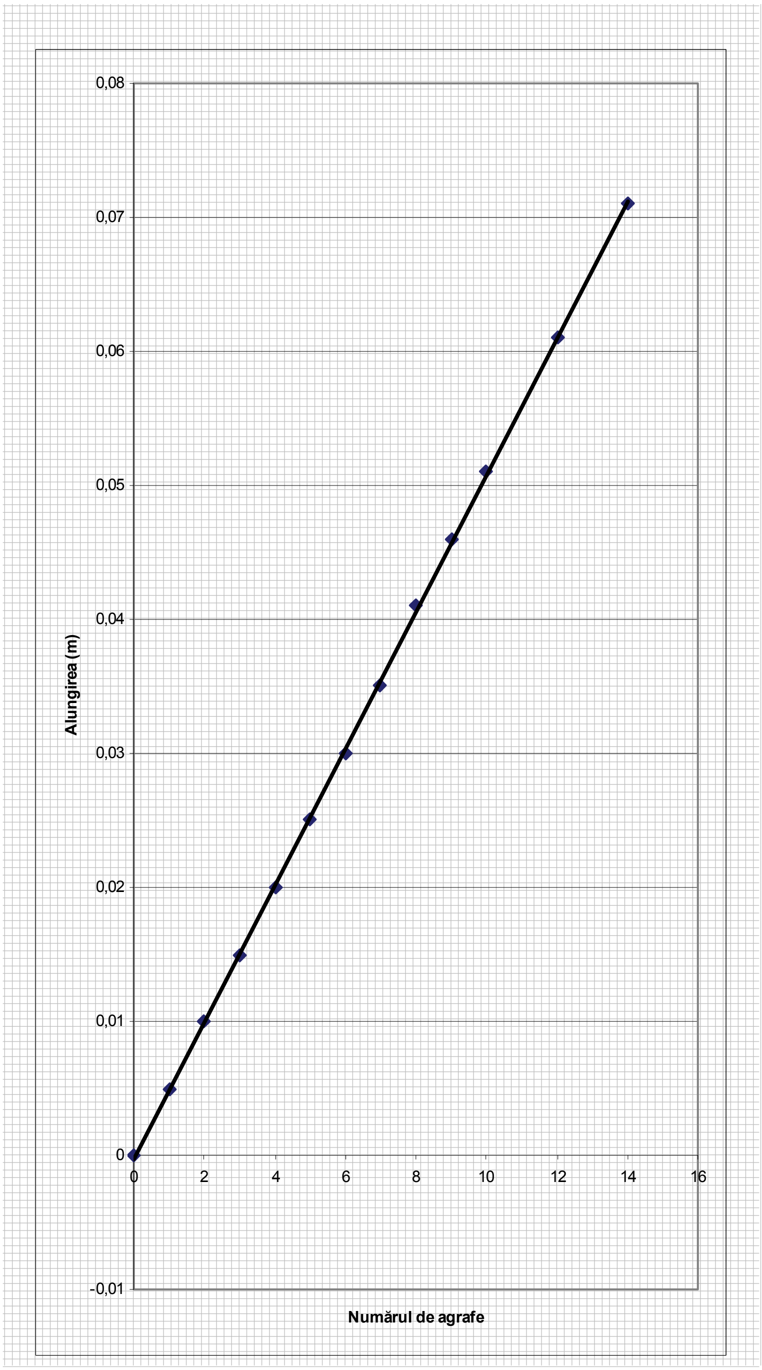
Din oficiu: 1 punct
Total subiect I: 10 puncte

Foaia de Răspuns IIA$_1$ – soluție
Completează cerințele de mai jos!

TABELUL DE DATE EXPERIMENTALE… - 1 punct

n	Δy (m)	T (s)	T ² (s²)
0	0		0,0000
1	0,005		
2	0,01		
3	0,015		
4	0,02	0,306	0,0936
5	0,025		
6	0,03	0,363	0,1318
7	0,035		
8	0,041	0,416	0,1731
9	0,046		
10	0,051	0,462	0,2134
12	0,061	0,5	0,2500
14	0,071	0,544	0,2959
16		0,578	0,3341
18		0,609	0,3709
20		0,644	0,4147

GRAFICUL 1 …… **1punct**



Descrie modelul matematic pe care-l foloseşti şi compară rezultatele reprezentate grafic cu acest model:

$$y_n = \frac{n m_0 g}{k}$$ ………….. **0,5 puncte**

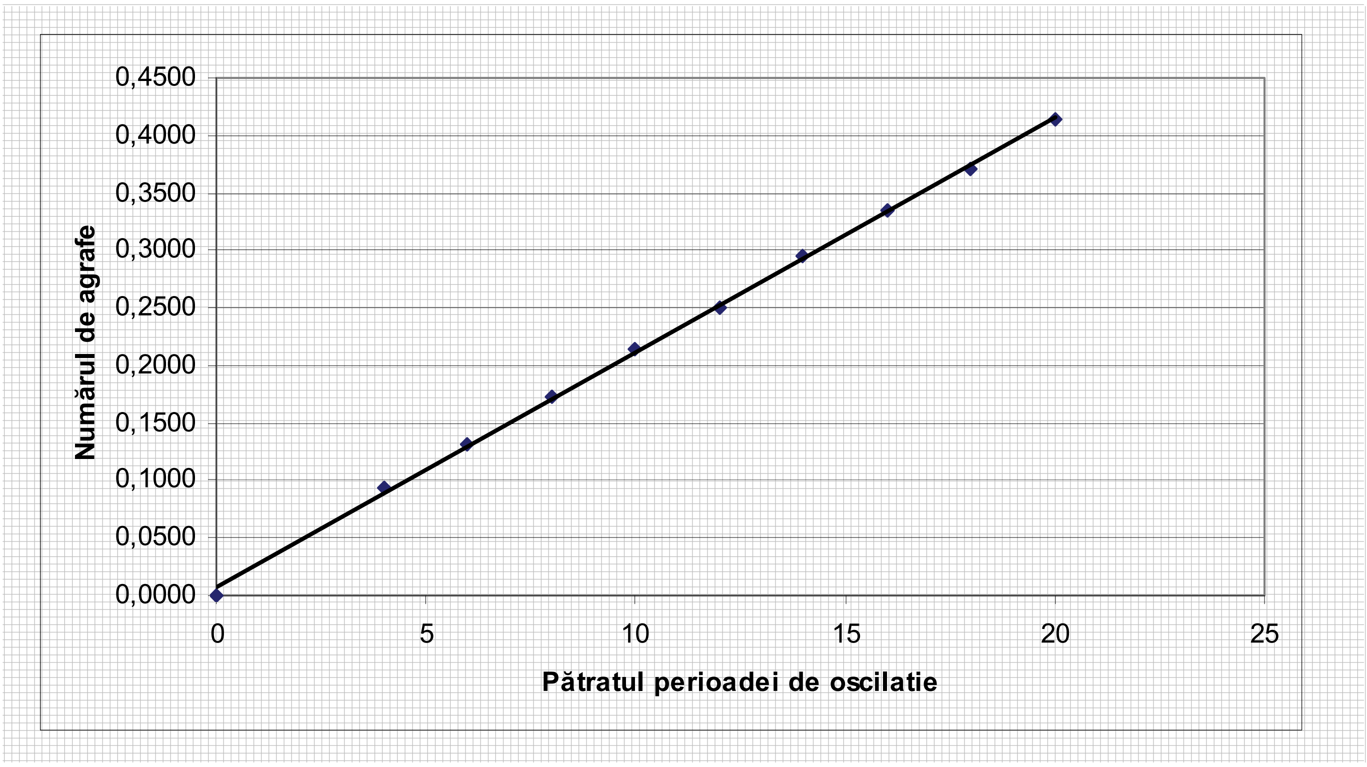
Alungirea este proporțională cu numărul de agrafe ………… **0,5 puncte**

Panta graficului: Expresie matematică şi valoare numerică:

$tg\alpha_1 = \frac{m_0 g}{k}$ ………… **0,25 puncte**; $\quad$ $tg\alpha_1 = 0{,}0051$ m………… **0,25 puncte**.

Foaia de Răspuns II A_2 – soluție
Completează cerințele de mai jos!

GRAFICUL 2 …..- **1,25 puncte**



Expresia perioadei de oscilație în funcție de numărul de agrafe: $T = 2\pi\sqrt{\frac{nm_0}{k}}$ …**0,25 puncte**

Descrie modelul matematic pe care-l foloseşti şi compară rezultatele reprezentate grafic cu acest model:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m_0}{k} n$$. ….. **0,25 puncte**

Pătratul perioadei este proporțional cu numărul de agrafe………. **0,25 puncte**

Panta graficului: Expresie matematică şi valoare numerică:

$$tg\alpha_2 = \frac{4\pi^2 m_0}{k}$$ ………**0,25 puncte**

$tg\alpha_2 = 0{,}0204$ m………**0,25 puncte**

Surse de erori:

0,25 puncte

Procedură:
prin raportare se elimină m_o şi k… **0,25 puncte**
Expresia accelerației gravitaționale aşa cum rezultă din analizele de mai sus:

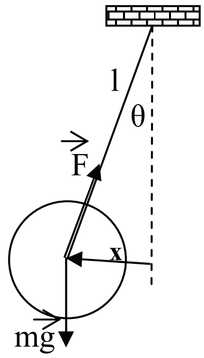
$$g = 4\pi^2 \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}$$ ……**0,25 puncte**

Valoarea numerică a accelerației gravitaționale:

$g = 9{,}86$ m/s^2 ……**0,25 puncte**

Foaia de răspuns II B - Soluție

Explicarea din punct de vedere fizic a posibilității ca globurile să aibă perioade de oscilație diferite: Considerăm pendulul fizic format de o sferă omogenă suspendată de un fir de lungime l. Principiul fundamental se scrie: $mg\theta l = J\varepsilon$; de aici rezultă:



$a = -\frac{mgl}{J}x = -\omega^2 x$ ….**0,25 puncte**. Perioada de oscilație va fi

$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$ … **0,25 puncte**.

Considerăm neglijabile masa şi grosimea peretelui globului,

perioada are expresia: $T = 2\pi\sqrt{\frac{7r}{5g}}$ …. **0,25 puncte**.

Această expresie ne spune că perioada de oscilație a sferelor pline ar trebui să fie identică, indiferent de masa lor, dacă în ele se află un solid rigid în mişcare de rotație. Diferența dintre perioade ne face să afirmăm că unul dintre globuri conține un lichid, care are numai mişcare de translație, dacă neglijăm forțele de frecare internă din lichid. În cazul nostru lichidul este conținut de sfera B, care oscilează cu perioadă mai mică, care oscilează aproximativ ca un pendul matematic, cu

perioada $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} < T$ …**0,5 puncte**.

Justificarea răspunsului cu calcule şi măsurători adecvate:

Pentru un număr destul de mare de oscilații (30) a rezultat intervalul de timp $\Delta t_A = 12{,}72$ s, iar $\Delta t_B = 11{,}68$ s. De aici rezultă perioadele $T_A = 0{,}424$ s, respectiv $T_B = 0{,}389$ s……**0,5 puncte**

Măsurând distanța de la centrul sferei până la punctul de suspensie rezultă: l = 3,6 cm. Considerând sfera B ca fiind un pendul matematic, rezultă pentru perioada de oscilație:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0{,}3804s$ …. **0,25 puncte**.

Având în vedere valorile numerice de mai sus, rezultă că presupunerea că globul B conține un lichid cu frecări interne foarte mici este valabilă.

Din oficiu: 1 punct
Total subiect II: 10 puncte