I. Feladat (10 pont)

Különböző ingák

Egy M tömegű testre, amely egy egyenes vonalú pályán mozoghat, egy $F = -k \cdot x$ nagyságú erő hat, ahol x a testnek az egyensúlyi helyzethez viszonyított távolsága. A test harmonikus rezgőmozgást végez, $\sqrt{k/M}$ körfrekvenciával. Egy ilyen jellegű mozgás esetén a kitérés – a test pillanatnyi távolsága az egyensúlyi helyzethez képest – egy harmonikus függvény szerint változik.
Hasonlóan, egy test, mely körpályán mozoghat, és amelyre egy, a testet az egyensúlyi helyzetébe visszahozó erő $\mu = -\kappa \cdot \alpha$ forgatónyomatéka hat, harmonikus rezgőmozgást végez $\sqrt{\kappa/j}$ körfrekvenciával. Egy m tömegű anyagi pont esetén, mely a forgástengelytől r távolságra található, a tehetetlenségi nyomaték $j = m \cdot r^2$. Körpályán a harmonikus függvény szerint változó mennyiség az α szögkitérés – az a középponti szög, melyet a test pillanatnyi helyzetvektora az egyensúlyi helyzetnek megfelelő helyzetvektorral zár be. Akárcsak a tömeg, a tehetetlenségi nyomaték is additív mennyiség.

A. Változó hosszúságú inga

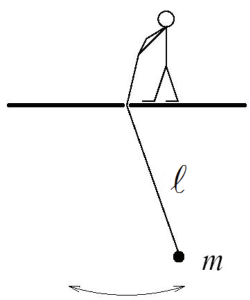
Egy m tömegű és ℓ_0 hosszúságú gravitációs inga $\Phi(\ell_0)$ szögamplitúdóval rezeg (leng), úgy hogy $\Phi(\ell_0) << 1rad$. Tételezd fel, hogy a mozgás kezdőfázisa nulla, a gravitációs gyorsulás $\vec{g}$.

a. Fejezd ki a gravitációs inga $\varphi(t)$ szögkitérését és $\Omega(t)$ szögsebességét az idő függvényében.

b. Határozd meg a gravitációs inga fonalában fellépő feszítőerő (időbeni) középértékének összefüggését.

c. Lassan növelik az inga hosszát (lásd a mellékelt ábrát) úgy, hogy ezen folyamat teljes időtartama alatt a szögamplitúdó $\Phi(\ell) << 1rad$. Határozd meg a szögamplitúdó $\dfrac{\Delta\Phi}{\Phi(\ell)}$ relatív változását e folyamat alatt. Fejezd ki az eredményt az inga pillanatnyi hosszának (ℓ) és a hossz $\Delta\ell$ változásának függvényében.

Útmutatás: A c pont megoldásához energetikai meggondolásokat használhatsz. A fonalában fellépő feszítőerő (időbeni) középértékének összefüggésére egy olyanszerű összefüggést használhatsz, amit a b pontban levezettél.



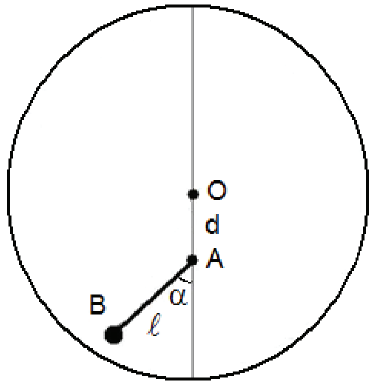
Megjegyzés: Ha hasznosnak ítéled, használhatod a következő információkat:

- *másodrangú megközelítésben kis, de nem nagyon kis szögekre:* $\cos\alpha \cong 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$
- *Egy periódusnyi időre a* $\cos^2\alpha$ *függvény középértéke:* $\langle \cos^2\alpha \rangle = \dfrac{1}{2}$

1. Mindegyik tételt (1, 2 valamint 3) külön, titkosított lapra kell megoldani.
2. Egy tétel keretén belül az a, b, és c alpontokat a diákok tetszőleges sorrendben oldhatják meg.
3. Munkaidő 3 óra, a tételek kiosztásának befejezésétől számítva.
4. A tanuló használhat nem programozható számológépeket.
5. Minden tételt 1-től 10-ig osztályoznak (1 pont hivatalból jár). A végső pontszám ezek összege.

B. Forgó inga

Egy vízszintes, R sugarú korong, állandó Ω szögsebességgel forog, az O ponton áthaladó saját rögzített függőleges tengelye körül, a mellékelt ábrának megfelelően. A korong középpontjától d távolságra egy másik függőleges tengelyt rögzítenek mereven a koronghoz.
Egy merev, elhanyagolható tömegű és $\ell < R - d$ hosszúságú AB rúd súrlódásmentesen foroghat a korong felületén, vízszintes síkban. A rúd elfordulhat az A-val jelzett végén áthaladó tengely körül. A rúd másik végén egy igen kis, r sugarú, m tömegű gömb alakú test található ($r << \ell$). Határozd meg:



a. A rúdra ható erő, A pontra vonatkoztatott forgatónyomatékának kifejezését, ha a rúd az OA iránnyal α szöget zár be $(\alpha << 1rad)$. Vedd úgy, hogy az α szög nagyon kis értékeire $\sin\alpha \cong \alpha$ *és* $\cos\alpha \cong 1$

b. Azt az összefüggést, amely megadja rúd kis rezgéseinek periódusát. (az AB rúd nagyon kis α szögamplitúdóval rezeg).

c. A rúdra $n+1$ darab, azonos m tömegű, nagyon kis sugarú gömböt helyeznek egymástól egyenlő, ℓ/n távolságra, egy-egy golyó a rúd két végére kerül. Erre az esetre határozd meg a rúdra ható erő A pontra vonatkoztatott forgatónyomatékát, ha a rúd az OA iránnyal α szöget zár be.

d Határozd meg az $n+1$ gömböt tartalmazó rúd kis rezgéseinek periódusát.

Amennyiben hasznosnak ítéled, használhatod a következő összefüggéseket:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}.$$

II. Feladat. (10 pont)

Sugár irányú áramok.

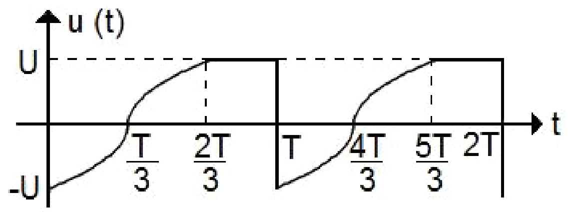
A. Az R sugarú rézből készült félgömb belső felületét ezüstréteggel vonjuk be. Ennek érdekében az edényt κ elektrokémiai egyenértékkel jellemzett elektrolittal töltjük meg. A gömb középpontjába, melyből az edényt kivágtuk, egy r ($r << R$) sugarú gömb alakú ezüstelektródot helyezünk. Az oldat ionjainak koncentrációja nem változik az elektrolízis során. Ha a középponti elektród és az edény fala között egy U feszültséget alkalmazunk, akkor az edény falán ezüstlerakódás jelenik meg. Ha a polarizálás irányát megváltoztatjuk, az oldat ionjai fordított irányba mozognak, és a félgömb alakú edény fala korrodálódik. Az edényben található elektrolit ionjai sugárirányban mozognak.

a. Az U elektromos feszültséget T ideig alkalmazva, az R sugarú félgömb alakú test felületére lerakódó ezüst tömege m. Határozd meg egy másik, $2R$ sugarú félgömb alakú edény falára lerakódó ezüst tömegét, ha ugyanazt az elektrolitot használjuk. Az elektrolízis áramsűrűsége és a lerakódás időtartama nem változik. Fejezd ki az eredményt az m függvényében.

b. A félgömb alakú edényt egy szigetelő anyagból készült, L hosszúságú, S keresztmetszetű tömlő segítségével töltjük meg. Határozd meg a tömlő két vége között az elektrolit elektromos ellenállását. Fejezd ki az eredményt R, κ, U, T, L, m és S függvényében.

c. Az félgömb alakú edény fala és a középpontban elhelyezett elektród közötti potenciálkülönbség időben periodikusan változik az alábbi törvény szerint:

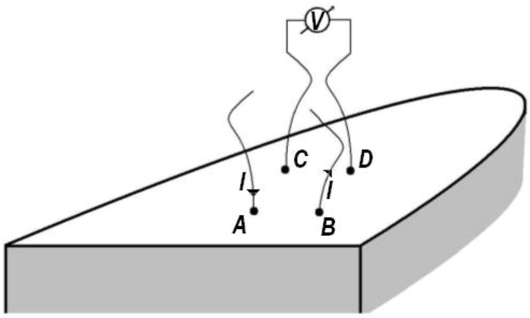
$$u(t) = \begin{cases} -U\cdot\sqrt{1-3t/T} & ha\ \ 0 \le t \le T/3 \\ U\cdot\sqrt{3t/T-1} & ha\ \ T/3 < t < 2T/3 \\ U & ha\ \ 2T/3 \le t \le T \end{cases}$$



1. Mindegyik tételt (1, 2 valamint 3) külön, titkosított lapra kell megoldani.
2. Egy tétel keretén belül az a, b, és c alpontokat a diákok tetszőleges sorrendben oldhatják meg.
3. Munkaidő 3 óra, a tételek kiosztásának befejezésétől számítva.
4. A tanuló használhat nem programozható számológépeket.
5. Minden tételt 1-től 10-ig osztályoznak (1 pont hivatalból jár). A végső pontszám ezek összege.

Az $u(t)$ függvény grafikus ábrázolását a mellékelt ábra mutatja be. Határozd meg az edény fala és a középpontban elhelyezett elektród közötti feszültség effektív értékét. Fejezd ki az eredményt U függvényében.
d. Határozd meg az $n \cdot T$ idő alatt, az R sugarú félgömb alakú edény falára kiváló (lerakódó) ezüstréteg tömegét. Fejezd ki az eredményt az m tömeg és n természetes szám függvényében (n értéke nagy).

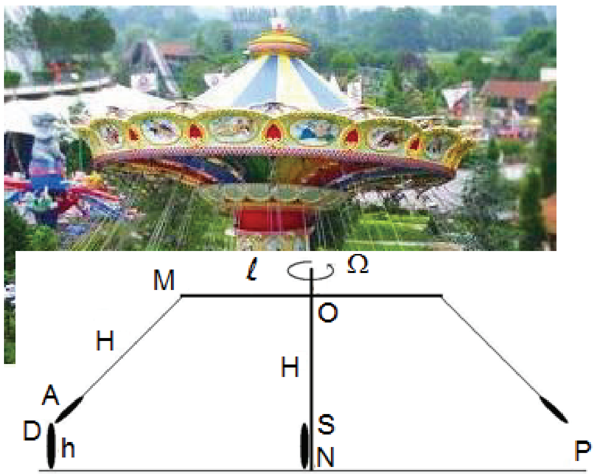
B. Egy félvezetőből készült lemez vastagsága és felülete elég nagy ahhoz, hogy úgy tekintsük, hogy teljesen kitölti a félteret. A lemez szabad felületén, egy $a = 1\,cm$ oldalhosszúságú négyzet csúcsaiban egy-egy elektromos érintkező található, melyeket a mellékelt ábrán A, B, C és D-vel jelöltek. Az A és B érintkezőkön be illetve kilép egy $I = 1\,mA$ erősségű áram. A voltmérő melyet a C és D érintkezők közé kötnek, $U = 5{,}6\,V$ feszültséget mutat. Határozd meg a lemez anyagának fajlagos ellenállását.



III. Feladat. (10 pont)

Zenélő körhinta

A Zeneiskola diákjai kimentek a Vidámparkba. András és más fiuk is az osztályból úgy döntöttek, hogy kipróbálják a körhintát.
A mellékelt rajzon a forgó körhinta van vázlatosan ábrázolva. A körhinta "kalapjának" sugara $MO = \ell$ és $ON = H$ magasságban található. A körhinta székeit tartó láncok hossza $MA = H$. Andrásnak van egy sípja, mely mindig a *„la"* hangot bocsátja ki. Diána, akinek a magassága h, úgy helyezkedik el, hogy a forgó körhinta székei pontosan a feje magasságában haladnak el. Lévén jó tanuló fizikából, Diána a következő kérdéseket teszi fel magának:



a. mekkora a körhinta szögsebessége?
b. A körhinta székei és a láncok egy egyenes körkúp palástján helyezkednek-e el?
c. Mekkora (a körhinta forgása közben) a székek kis rezgéseinek periódusa? Feltételezzük, hogy a székekben gyerekek ülnek, a gyerek-szék együttes anyagi pontnak tekinthető.
d. Melyik a legnagyobb frekvenciájú zenei hang, ami megfelel a Diána által észlelt legmagasabb hangnak? Melyik a legkisebb frekvenciájú zenei hang, ami megfelel a Diána által észlelt legmélyebb hangnak? Mekkora távolságra van Dianától András akkor, amikor a sípja a Diána által észlelt legmagasabb illetve legmélyebb hangot bocsátja ki?
e. Melyik lesz a legnagyobb, illetve a legkisebb frekvenciájú zenei hang, melyet észlel a felvigyázó, miközben András sípját hallgatja? A felvigyázó magassága $SN = h$, és nagyon közel áll a körhinta forgástengelyéhez.
f. A felvigyázó azt mondja Dianának, hogy veszélyes közel maradnia a körhintához, és megkéri, hogy távolodjon el. Diána így, az új helyzetében kétszer akkora távolságra került a körhinta tengelyétől, mint az előző esetben. Megállapítja, hogy Andrásnak van egy olyan helyzete melyben a hangot a legmagasabbnak hallja. Melyik ez a helyzet, és melyik zenei hangot hallja Diána. Válaszolj Diána kérdéseire és igazold mindegyik válaszod.
Feltételezd, hogy a gravitációs gyorsulás értéke $g = 10{,}0\,m \cdot s^{-2}$, a hang terjedési sebessége levegőben $c = 300\,m \cdot s^{-1}$, valamint, hogy $h = 2{,}00\,m$, $H = 20{,}0\,m$, $\ell = 21{,}3\,m$. Úgy tekintjük, hogy a láncok tömeg

nélküli, ideális szálak. Ha szükséged van rá, használhatod az alábbi táblázat adatait, melyben feltüntettünk néhány zenei hang frekvenciáját.

Hang	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
f(Hz)	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

A hosszúságok kifejezésekor, használj deciméteres pontosságot. A számításokban dolgozz ezreléknyi pontossággal (három értékadó számjeggyel).
A válaszaidban nevezd meg azt a hangjegyet melynek a frekvenciája legközelebbi az általad meghatározott frekvenciához.

Javasolták:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Evaluare şi Examinare – Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti
Ioan POP – Colegiul Național „ M Eminescu" – Satu Mare

Fordítótanárok: Szász Ferenc – „M. Eminescu" Főgimnázium – Szatmárnémeti
Faluvégi Ervin Zoltán – „Silvania" Főgimnázium – Zilah

1. Mindegyik tételt (1, 2 valamint 3) külön, titkosított lapra kell megoldani.
2. Egy tétel keretén belül az a, b, és c alpontokat a diákok tetszőleges sorrendben oldhatják meg.
3. Munkaidő 3 óra, a tételek kiosztásának befejezésétől számítva.
4. A tanuló használhat nem programozható számológépeket.
5. Minden tételt 1-től 10-ig osztályoznak (1 pont hivatalból jár). A végső pontszám ezek összege.