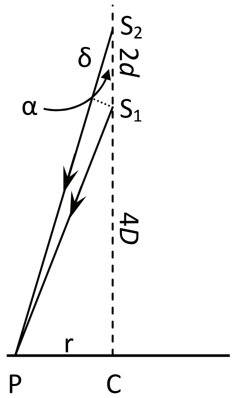
Olimpiada de Fizică - Etapa naţională
1 – 6 aprilie 2012
ILFOV
PROBA TEORETICĂ

XII

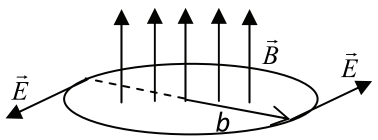
Grila de evaluare şi de notare

Orice altă rezolvare care conduce la rezultate corecte se va puncta corespunzător

<table>
<tr><th>Nr. item</th><th colspan="2">Problema I</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="7">a)</td><td>Schema dispozitivului se poate simplifica, observând că faţa argintată a lamei L_s formează imaginea S' a sursei S în C precum şi imaginea O_1' a oglinzii O_1 într-un plan paralel cu oglinda O_2, în faţa acesteia, la distanţa d. Imaginile lui S' în O_1' şi O_2 sunt S_1, respectiv S_2, ce joacă rolul de surse coerente (v. Fig.).
Distanțele $CS_1 = 4D$, iar $CS_2 = 4D + 2d$.
</td><td>1 p</td><td rowspan="7">3,00 p</td></tr>
<tr><td>Pentru undele care interferă într-un punct oarecare P, în care dau maxim de interferența, diferența de drum este
$$\delta = 2d\cos\alpha = 2m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{m\lambda}{2d}, \qquad (1)$$</td><td>0,50 p</td></tr>
<tr><td>iar raza acelui inel luminos este
$$r = (4D + 2d)tg\alpha . \qquad (2)$$</td><td>0,25 p</td></tr>
<tr><td>Introducând (1) în (2), rezultă:
$$r_m = (4D + 2d)\sqrt{\left(\frac{2d}{m\lambda}\right)^2 - 1} . \qquad (3)$$</td><td>0,50 p</td></tr>
<tr><td>În punctul C raportul dintre diferența de drum şi lungimea de undă este
$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} = 400 , \qquad (4)$$</td><td>0,25 p</td></tr>
<tr><td>adică acolo se formează un maxim de interferență. Prin urmare, cel mai mic inel luminos (primul inel luminos) se formează pentru
$\boxed{m_1 = 399 \Rightarrow r_1 = 28{,}3\ \text{cm}}$, iar ultimul inel luminos se obține pentru</td><td>0,25 p</td></tr>
<tr><td>$\boxed{m_{399} = 1 \Rightarrow r_{399} = 1{,}60 \cdot 10^3\ \text{m}}$.</td><td>0,25 p</td></tr>
<tr><td rowspan="3">b)</td><td>Dacă în C ambele radiații produc aceeaşi stare de interferență, atunci diferența de drum se scrie
$$\delta_0 = 2d = m_0\lambda = m_0'\lambda' \Rightarrow 2d\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = m_0 - m_0' \in N , \qquad (5)$$</td><td>0,50 p</td><td rowspan="3">1,50 p</td></tr>
<tr><td>de unde $d = \frac{\lambda\lambda'}{2(\lambda' - \lambda)}(m_0 - m_0') = d_{\min}(m_0 - m_0')$, (6)</td><td>0,50 p</td></tr>
<tr><td>adică
$$\boxed{d_{\min} = \frac{\lambda\lambda'}{2(\lambda' - \lambda)} = 289{,}4\ \mu\text{m}} . \qquad (7)$$</td><td>0,50 p</td></tr>
</table>

c)	Informația din enunț este $$\delta_0 - \delta \le \frac{\lambda}{4}, \qquad (8)$$ aşa încât, în acord cu (1), ținând cont de aproximația $\cos\alpha \cong 1-\frac{\alpha^2}{2}$, dacă $\alpha << 1\,\text{rad}$, se obține $$\frac{\lambda}{4} \ge 2x - 2x\cos\alpha = 2x(1-\cos\alpha) \cong x\alpha^2, \qquad (9)$$ de unde $$\alpha \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{x}}. \qquad (10)$$ Deoarece $$r = (4D+2x)tg\alpha \cong (4D+2x)\alpha, \qquad (11)$$ atunci $$\boxed{r \le (2D+x)\sqrt{\frac{\lambda}{x}}}. \qquad (12)$$	0,25 p 0,50 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p	**1,50 p**
d)	Dacă deplasarea oglinzii O_1 este x, atunci diferența de drum între cele două unde ce interferă în C este $$\delta = 2x = 2vt, \qquad (13)$$ iar diferența de fază $$\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2vt = \frac{2v}{c}\cdot 2\pi f_0 t. \qquad (14)$$ Dacă intensitatea fiecărei unde care interferă este I_0, atunci intensitatea undei rezultate în urma interferenței este $$I = 2I_0(1+\cos\varphi). \qquad (15)$$ Introducând (14) în (15) se observă că al doilea termen al intensității rezultante este unul armonic, al cărui frecvență este $$\boxed{f = \frac{2v}{c}f_0}. \qquad (16)$$	0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p	**1,00 p**
e)	Componenta armonică a intensității luminoase incidente, după interferență, pe fotocelulă este $$I_1 = 2I_0\cos\varphi = 2I_0\cos\frac{4\pi x}{\lambda} = 2I_0\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(vt + b\cos 2\pi\beta t)\right]. \qquad (17)$$ Deoarece $\frac{4\pi}{\lambda}vt = 2\pi f t$, iar $\frac{b}{\lambda} << 1$, atunci, ținând cont că, pentru unghiuri foarte mici $u << 1\,\text{rad}$, $\sin u \cong u$, iar $\cos u \cong 1$, se poate scrie $$\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(vt + b\cos 2\pi\beta t)\right] = \cos\left(2\pi f t + 4\pi\frac{b}{\lambda}\cos 2\pi\beta t\right) =$$ $$= \cos 2\pi f t - 4\pi\frac{b}{\lambda}\cos 2\pi\beta t \cdot \sin 2\pi f t$$ Cum $$\cos 2\pi\beta t \cdot \sin 2\pi f t = \frac{1}{2}\left[\sin 2\pi(f-\beta)t + \sin 2\pi(f+\beta)t\right],$$ atunci, introducând aceste relații în (17), rezultă $$I_1 = 2I_0\cos 2\pi f t - 4\pi I_0\frac{b}{\lambda}\left[\sin 2\pi(f-\beta)t + \sin 2\pi(f+\beta)t\right]. \qquad (18)$$ Prin urmare, semnalele parazite au frecvențele $(f-\beta)$, respectiv $(f+\beta)$. În acord cu enunțul	0,25 p 0,25 p 0,25 p. 0,25 p 0,50 p	**2,00 p**

		$\boxed{\dfrac{4\pi I_0 \dfrac{b}{\lambda}}{2I_0} \le \dfrac{1}{100} \Rightarrow b \le \dfrac{\lambda}{200\pi} = 8\cdot 10^{-10}\ \text{m}}$. (19)	0,50 p	
Oficiu				**1,00p**
TOTAL Problema I				**10p**

Nr. item	*Problema a II -a*		Punctaj
	Calitativ, se întâmplă următoarele: sferele conectate la sursă se vor încărca cu sarcină electrică. La închiderea întrerupătorului, în timpul foarte scurt în care creşte curentul electric prin înfăşurarea solenoidului, va apare un câmp magnetic varibil care va genera un câmp electric în jurul câmpului magnetic din solenoid, care la rândul său, va acționa asupra sferelor încărcate, punându-le în mişcare. Deci, pendulul va începe să oscileze armonic. Dacă vom afla viteza pe care o capătă pendulul, atunci după legile oscilațiilor armonice vom putea găsi amplitudinea lor. Pentru evaluarea sarcinii de pe fiecare sferă vom considera că sferele sunt izolate. În aceste condiții, potențialul sferelor este egal cu tensiunea sursei şi se poate calcula cu formula $$U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$$ unde $R = a/2$ este raza sferei. Din această formulă aflăm sarcina electrică de pe sferă: $$q = 2\pi\varepsilon_0 a U_1$$	0,50p 0,50p	**1,00p**
	Pentru determinarea intensității câmpului electric ne vom folosi de legea inducției electromagnetice. Analizăm un contur circular de rază b (egală cu distanța de la centrul sferei pînă la fir), aflat în câmp magnetic variabil, pe axa sa de simetrie. În timpul variației câmpului magnetic prin acest contur, în contur apare o t.e.m. indusă $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, care poate fi considerată ca fiind egală cu lucrul mecanic efectuat de câmpul electric care înconjoară cîmpul magnetic din solenoid, pentru a deplasa de-a lungul conturului unitatea de sarcină pozitivă, adică $e = 2\pi b E$. Fluxul magnetic prin contur este $\Phi = \pi b^2 B$, deci modulul vectorului intensitate a câmpului electric este în acest caz: $$E = \frac{b}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}$$  	0,50p 0,50p	**1,00p**
	Sub acțiunea acestui câmp fiecare sferă va căpăta un impuls şi va începe să oscileze. Din ecuația principiului fundamental, aplicat mişcării de rotație a pendulului: $J\varepsilon = 2Fb$ obținem: $$J\frac{d\omega}{dt} = 2Fb = 2qEb$$ $$J\Delta\omega = 2qEb\Delta t = 2q\frac{b^2}{2}\Delta B = qb^2\Delta B$$ De aici, viteza unghiulară inițială a pendulului (viteza maximă) este: $$\omega_{\max} = \omega_0 = \frac{qb^2 B}{J}$$	0,50p 0,50p	**1,00p**

	Dacă unghiul de răsucire a pendulului variază după o lege armonică $\alpha = \alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$, atunci viteza sa unghiulară va depinde de timp după legea $\omega = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = \omega_0\cos\frac{2\pi}{T}t$. Deci unghiul maxim de răsucire (amplitudinea oscilațiilor) se exprimă în funcție de viteza maximă prin relația: $$\alpha_0 = \frac{\omega_0 T}{2\pi} = \frac{qb^2BT}{2\pi J}$$	0,50p 0,50p	**1,00p**
	Momentul de inerție este momentul de inerție propriu al sferelor goale, adunat cu momentul de inerție al rotației lor în jurul centrului tijei: $$J = 2\left[\frac{2}{3}m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + mb^2\right] = 2mb^2\left(1+\frac{a^2}{6b^2}\right)$$ Aşadar, $$\alpha_0 = \frac{qBT}{4\pi m\left(1+\frac{a^2}{6b^2}\right)}$$	0,50p 0,50p	**1,00p**
	Astfel, pentru a determina unghiul de rotire ne-a rămas să calculăm inducția câmpului magnetic la capătul solenoidului. Din considerente de simetrie se poate conchide că valoarea inducției magnetice B a acestui câmp este de două ori mai mică decât inducția câmpului magnetic în centrul solenoidului, B_0. Aşadar, $$B = \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r nI$$ unde $n = \frac{1}{d}$.		**1,00p**
	Intensitatea curentului o aflăm din legea lui Ohm $I = \frac{U_0}{R}$, unde rezistența electrică a înfăşurării este $$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi r\frac{h}{d}}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{8rh\rho}{d^3}$$ unde h/d este numărul de spire al înfăşurării.		**1,00p**
	Folosind toate formulele de mai sus se obține $$\alpha_0 = \frac{ad^2\mu_r U_1 U_0 T}{32c^2\rho mrh\left(1+\frac{a^2}{6b^2}\right)}$$ Având în vedere informația din enunț, $\frac{a^2}{6b^2} \ll 1$ şi deci $$\alpha_0 = \frac{ad^2\mu_r U_1 U_0 T}{32c^2\rho mrh}$$	0,50p 0,50p	**1,00p**

	Înlocuind aici toate valorile numerice se obține $\boxed{\alpha_0 \approx 0,046\,rad \approx 2,6^\circ}$		**1,00p**
Oficiu			**1,00p**
TOTAL Problema a II-a			**10p**

Nr. item	*Problema a III -a*		Punctaj
a)	Durata voiajului lui A măsurată de B este: $T = 36 \text{ ani} - 26 \text{ ani} = 10 \text{ ani}$, din care $T/2 = 5$ ani corespund depărtării lui A şi $T/2 = 5$ ani corespund apropierii lui A.	0,50p	**3,00p**
	Durata depărtării lui A, determinată de A, este: $T'_{\text{departare}} = \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = 4 \text{ ani.}$	0,50p	
	Durata apropierii lui A, determinată de A, este: $T'_{\text{apropiere}} = \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = 4 \text{ ani.}$	0,50p	
	Durata voiajului lui A, determinată de A, este: $T' = T\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = 8 \text{ ani.}$	0,25p	
	Vârsta lui A la revenirea pe Pământ este: $V_{\text{A}} = 26 \text{ ani} + 8 \text{ ani} = 34 \text{ ani.}$	0,25p	
	Concluzie: la reîntâlnirea celor doi fraţi gemeni, după voiajul lui A în cosmos, acesta este cu 2 ani mai tânăr decât B.	0,25p	
	Paradoxul celor doi gemeni ($T' < T$) apare atunci când, raţionând prin simetrie ar trebui să considerăm că A este în repaus şi că B este în mişcare, astfel încât A ar trebui să gândească despre B că va fi mai tânăr la finalul voiajului.	0,25p	
	Dar acest paradox se întemeiază pe un raţionament fals. În fapt, geamănul B nu participă la fazele de accelerare şi de frânare, existând astfel o asimetrie între A şi B, astfel încât este adevărat numai că geamănul A, care părăseşte Pământul, va fi mai tânăr decât geamănul B, la revenirea sa pe Pământ.	0,50p	
b)	Datorită efectului Doppler, frecvenţele semnalelor recepţionate de B în timpul depărtării şi respectiv al apropierii lui A sunt: $v_{\text{d}} = v\sqrt{\frac{1-\frac{\mathrm{v}}{c}}{1+\frac{\mathrm{v}}{c}}} < v;$	0,25	
	$v_{\text{a}} = v\sqrt{\frac{1+\frac{\mathrm{v}}{c}}{1-\frac{\mathrm{v}}{c}}} < v.$	0,25	

	Durata depărtării lui A ($T_d = \frac{T}{2}$), determinată de B, nu coincide cu durata recepției de către B a tuturor semnalelor bătăilor inimii lui A din faza depărtării acestuia ($T_{r,d}$; determinat de B), deoarece semnalul de la ultima bătaie a inimii din faza depărtării lui A abia pleacă din A atunci când acesta a ajuns la distanța: $$d = \mathrm{v}T_d = \mathrm{v}\frac{T}{2}.$$	0,25p	
	Viteza luminii fiind aceeaşi în raport cu orice SRI, rezultă: $$T_{r,\,d} = \frac{T}{2} + \frac{d}{c} = \frac{T}{2} + \frac{\mathrm{v}T}{2c} = \frac{T}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c}\right).$$	0,25p	
	Ca urmare, numărul bătăilor inimii lui A, înregistrate de B, atunci când A se depărtează este: $$n_d = \nu_d T_{r,\,d} = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{\mathrm{v}}{c}}{1+\frac{\mathrm{v}}{c}}}\,\frac{T}{2}\,\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c}\right);$$ $$n_d = \frac{\nu T}{2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}.$$	0,25p	**3,00p**
	Deoarece durata recepției tuturor semnalelor inimii lui A, determinată de B, de la despărțirea şi până la reîntâlnirea celor doi frați gemeni, trebuie să fie egală cu durata întregului voiaj al lui A, determinată de B, rezultă că durata recepției de către B a tuturor semnalelor inimii lui A din faza apropierii acestuia, este: $$T_{r,\,a} = T - T_{r,\,d};$$ $$T_{r,\,a} = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) < T_{r,\,d},$$	0,25p	
	ceea ce evidențiază că durata recepției semnalelor din faza de apropiere este diferită de durata recepției semnalelor din faza de depărtare, deşi duratele celor două faze sunt egale.	0,25p	
	Aceasta se întâmplă deoarece semnalul de la prima bătaie a inimii din faza apropierii lui A, identificat cu semnalul de la ultima bătaie a inimii lui A din faza depărtării lui A, a plecat din A atunci când acesta este încă la distanța: $$d = \mathrm{v}T_a = \mathrm{v}\frac{T}{2}.$$	0,25p	
	În aceste condiții numărul bătăilor inimii lui A, înregistrate de B, atunci când A se apropie este: $$n_a = \nu_a \mathrm{T}_{r,\,a} = \nu\sqrt{\frac{1+\frac{\mathrm{v}}{c}}{1-\frac{\mathrm{v}}{c}}}\,\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right)\frac{T}{2};$$		

	$$n_a = \frac{vT}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = n_d.$$ Numărul total al bătăilor inimii lui A, înregistrate de B, de la despărşirea şi până la reîntâlnirea celor doi fraţi gemeni, este: $$n_{A,\,B} = n_d + n_a = vT\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$ Numărul total al bătăilor inimii lui B, înregistrate de B, de la despărţirea şi până la reîntâlnirea celor doi fraţi gemeni, este: $$n_{B,\,B} = v\mathrm{T}.$$ Rezultă: $$n_{A,\,B} = n_{B,\,B}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < n_{B,\,B}.$$ *Concluzie*: „tinereţea“ lui A faţă de B, la reîntâlnirea celor doi fraţi gemeni se justifică prin numărul diferit al bătăilor inimilor lor.	0,25p 0,25p 0,25p 0,25p	
c)	Să considerăm că durata întregului voiaj al lui B, determinată de A este *t*. Ţinând cont de vitezele depărtării (v) şi respectiv apropierii (4v/3) ale lui B faţă de A, rezultă: $$\mathrm{v}t_d = \frac{4\mathrm{v}}{3}t_a;$$ $$t_d + t_a = t,$$ unde t_d şi t_a sunt duratele depărtării şi respectiv apropierii lui B faţă de A; $$t_d = \frac{4}{7}t; \qquad t_a = \frac{3}{7}t.$$ Ca urmare, duratele aceloraşi faze, determinate de B, sunt: $$t'_d = \frac{4}{7}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} < t_d;$$ $$t'_a = \frac{3}{7}t\sqrt{1-\left(\frac{4\mathrm{v}}{3c}\right)^2} < t_a,$$ astfel încât durata întregului voiaj al lui B, determinată de B, este: $$t' = t'_d + t'_a;$$ $$t' = \frac{t}{7}\left[4\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} + 3\sqrt{1-\left(\frac{4\mathrm{v}}{3c}\right)^2}\right] < t.$$ Dacă la reîntâlnire, cei doi fraţi au din nou vârste identice, înseamnează că voiajul lui B a anulat avantajul de 2 ani al lui A, existent la despărţirea acestora. Rezultă: $$t' + 2\ \text{ani} = t;$$	0,25p 0,25p 0,50p 0,25p 0,50p 0,25p	**3,00p**

	$\frac{t}{7}\left[4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+3\sqrt{1-\left(\frac{4v}{3c}\right)^2}\right]$ + 2 ani = t; t = 7 ani; t' = 5 ani; V_A = 34 ani + 2 ani + 7 ani = 43 ani; V_B = 36 ani + 2 ani + 5 ani = 43 ani.	0,25p 0,25p 0,25p 0,25p	
Oficiu			**1,00p**
TOTAL Problema a III-a			**10p**

Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU - Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
Prof. Liviu ARICI – C. N. „Nicolae Bălcescu" Brăila
Prof. dr. Mihail SANDU – G. Ș. E. A. S. Călimănești