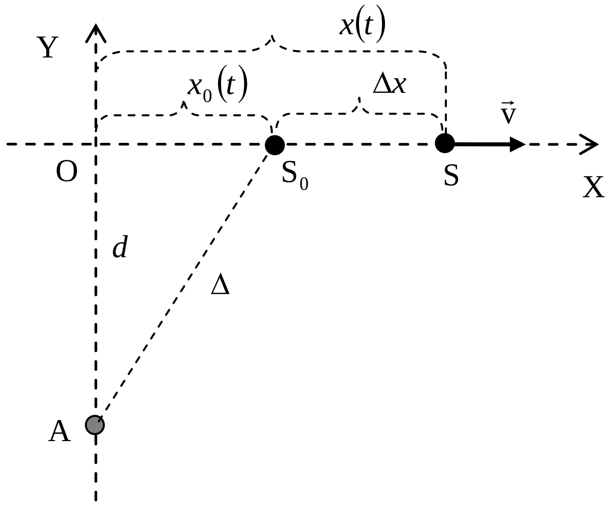
PROBLEMA 3

<table>
<tr><th>Barem de notare</th><th>Parţial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>Problema 3</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a)</td><td></td><td>3 p</td></tr>
<tr><td>

Aşa cum indică desenul din figura alăturată, la momentul iniţial, $t_0 = 0,$ sursa de lumină trece prin originea O a sistemului de coordonate XY şi la momentul *t* ea este în poziţia $\mathrm{S}(x),$ unde:

$$x = x(t) = \mathrm{v}t.$$



Observatorul din A primeşte lumina trimisă de sursă atunci când aceasta se afla în poziţia $\mathrm{S}_0(x_0).$ Acestui semnal luminos, ca să ajungă de la sursă la observator, parcurgând distanţa:

$$\Delta = \sqrt{x_0^2 + d^2},$$

îi trebuie timpul:

$$\tau = \frac{\Delta}{c} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$$

După timpul τ de la emiterea semnalului luminos, sursa a ajuns în poziţia $\mathrm{S}(x)$, parcurgând distanţa:

$$\Delta x = x - x_0 = \mathrm{v}\tau,$$

astfel încât:

$$\frac{x - x_0}{\mathrm{v}} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$$

</td><td>0,50</td><td></td></tr>
<tr><td>

Evident, deoarece $x = x(t),$ din relaţia anterioară rezultă că şi $x_0 = x_0(t),$ aceasta fiind coordonata de poziţie a sursei în aprecierea observatorului. Într-adevăr, dacă sursa a fost în poziţia $\mathrm{S}_0(x_0)$ la momentul $(t - \tau)$ şi semnalul luminos a avut nevoie de timpul τ ca să ajungă la observator, atunci, recepţia semnalului la observator s-a făcut la momentul *t*, exact momentul când sursa este în poziţia S. Ca urmare, coordonata de poziţie x_0 este apreciată de observator la momentul *t*, astfel

</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

încât, pentru observator, $x_0 = x_0(t)$:

$$\frac{vt - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c};$$

$$\left(c^2 - v^2\right)x_0^2 - 2vtc^2x_0 + v^2\left(t^2c^2 - d^2\right) = 0;$$

$$x_0(t) = \frac{vtc^2 \pm \sqrt{v^2t^2c^4 - \left(c^2 - v^2\right)v^2\left(t^2c^2 - d^2\right)}}{c^2 - v^2};$$

$$x_0(t) = v\frac{c^2t - \sqrt{v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}{c^2 - v^2},$$

ceea ce evidenţiază o mişcare neuniformă apreciată de observator pentru sursa de lumină.

</td><td>1,50</td><td></td></tr>
<tr><td>

Pentru calculul vitezei instantanee şi a acceleraţiei instantanee ale sursei apreciate de observator, utilizând noţiuni cunoscute din analiza matematică, rezultă:

$$w = \frac{dx_0}{dt} = \frac{vc^2}{c^2 - v^2}\left[1 - \frac{v^2t}{\sqrt{v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}\right];$$

$$a = \frac{dw}{dt} = -\frac{v^3c^2d^2}{\left[v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)\right]^{3/2}} < 0,$$

ceea ce dovedeşte caracterul încetinit al mişcării sursei, apreciată de observator.

Evident, pentru $t = 0$, se obţine valoarea maximă a acceleraţiei apreciată de observator pentru mişcarea sursei de lumină:

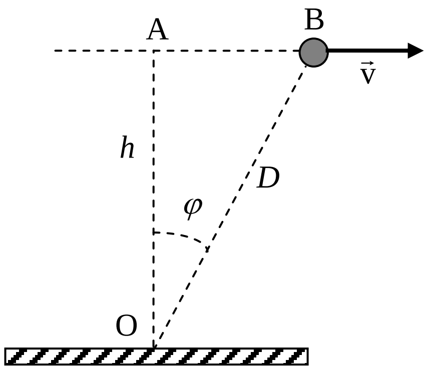
$$a_{\max} = \left\lvert \frac{v^3c^2d^2}{d^3\left(c^2 - v^2\right)^{3/2}} \right\rvert = \frac{v^3}{cd}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}.$$

</td><td>1,00</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td><td>2 p</td></tr>
<tr><td>

Dacă la momentul $t = 0$ obiectul luminos trece prin punctul cel mai apropiat de observator, punctul A, aşa cum indică desenul din figura alăturată şi dacă la momentul oarecare, $\tau > 0$, obiectul luminos a ajuns în punctual B, parcurgând distanţa:

$$x = v_0\,\tau = h\tan\varphi,$$

atunci observatorul din O va afla de trecerea obiectului luminos prin punctual B la ora $t > \tau$:



$$t = \tau + \frac{D}{c} = \tau + \frac{\frac{h}{\cos\varphi}}{c} = \tau + \frac{h}{c\cos\varphi}.$$

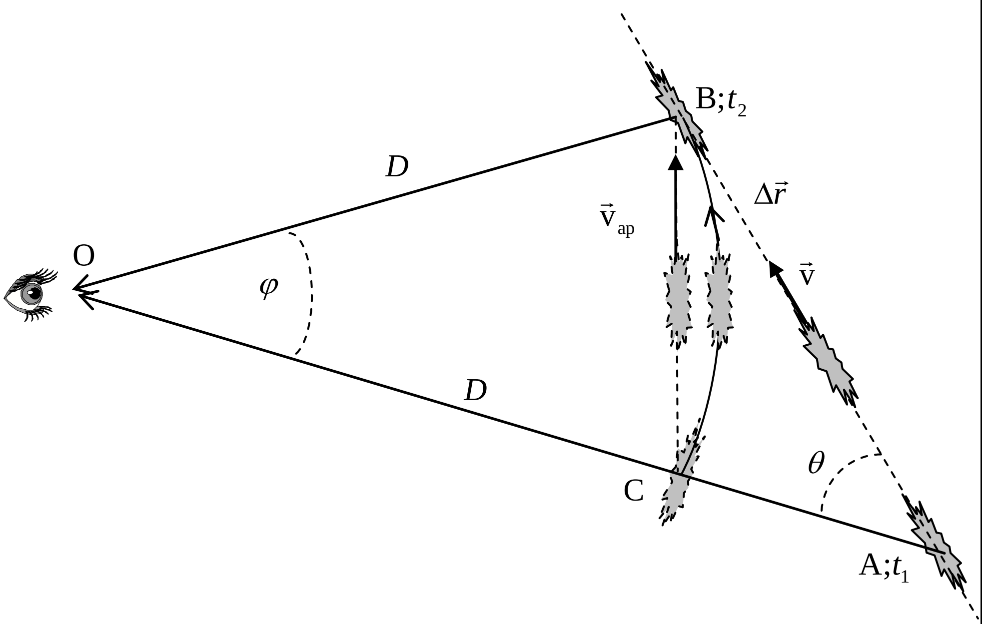
</td><td>0,50</td><td></td></tr>
<tr><td>

Viteza obiectului luminos, v, înregistrată de observatorul din O la ora $t > \tau$, corespunzătoare momentului τ, atunci când obiectul trece prin punctul B, va fi:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = v_0\frac{1}{\frac{dt}{d\tau}};$$

</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\tau+\frac{h}{c\cos\varphi}\right);\ \varphi=\varphi(\tau);$$ $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1+\frac{h}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)=1+\frac{h}{c}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau};$$ $$x=\mathrm{v}_0\,\tau=h\tan\varphi,$$ $$\mathrm{d}x=\mathrm{v}_0\mathrm{d}\tau=h\,\mathrm{d}(\tan\varphi)=h\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=h\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi-\sin\varphi\,\mathrm{d}\cos\varphi}{\cos^2\varphi};$$ $$\mathrm{d}\sin\varphi=\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi;\ \ \mathrm{d}\cos\varphi=-\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi;$$ $$\mathrm{v}_0\mathrm{d}\tau=h\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi};$$ $$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{v}_0}{h}\cos^2\varphi;$$ $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1+\frac{\mathrm{v}_0}{c}\sin\varphi;$$ $$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0\frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}_0}{1+\frac{\mathrm{v}_0}{c}\sin\varphi}.$$ Observatorul din O vede obiectul luminos trecând prin punctul B, mai târziu decât momentul când s-a întâmplat această trecere, din cauza valorii finite a vitezei de propagare a luminii.	1,50	
c)		**4 p**
Un jet incandescent relativist pleacă din centrul unui nucleu galactic activ, deplasându-se pe direcția AB, cu viteza v așa cum indică desenul din figura alăturată. Să admitem că la momentul t_1 o rază de lumină părăsește jetul în punctul A și o altă rază de lumină părăsește jetul la momentul t_2 în punctul B, astfel încât: $$\Delta t=t_2-t_1;$$ $$\mathrm{AB}=\Delta r=\mathrm{v}\Delta t.$$		

	0,50	
Observatorul din punctul O nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. El apreciază mișcarea aparentă a jetului, în proiecție pe sfera cerească, de-a lungul arcului de cerc CB. Dacă unghiul φ este foarte mic, atunci $\mathrm{BC} \approx\perp \mathrm{AC}$, astfel încât: $$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\cdot\sin\theta = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta;$$ $$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\cdot\cos\theta = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta;$$ $$\mathrm{BC} \approx D\cdot\varphi;$$ $$\mathrm{BC} = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta = D\cdot\varphi = \mathrm{CB}.$$ La observatorul din punctul O, cele două semnale luminoase ajung la momentele τ_1 și respectiv τ_2, astfel încât: $$\tau_1 = t_1 + \frac{\mathrm{AO}}{c} = t_1 + \frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CO}}{c} = t_1 + \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta + D}{c};$$ $$\tau_2 = t_2 + \frac{\mathrm{BO}}{c} = t_2 + \frac{D}{c};$$ $$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \Delta t - \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta}{c};$$ $$\Delta\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\cos\theta\right)\Delta t;\ \beta = \frac{\mathrm{v}}{c};$$ $$\Delta\tau = (1-\beta\cos\theta)\Delta t;\ \Delta t = \frac{\Delta\tau}{1-\beta\cos\theta}.$$	1,50	
Observatorul nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. În proiecție pe sfera cerească, observatorul apreciază mișcarea aparentă a jetului pe direcția BC, cu viteza transversală: $$\mathrm{v}_{ap} = \frac{\mathrm{BC}}{\Delta\tau} = \frac{D\cdot\varphi}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)\Delta t};$$ $$\mathrm{v}_{ap} = \frac{\mathrm{v}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta};\ \beta_{ap} = \frac{\mathrm{v}_{ap}}{c};\ \mathrm{v}_{ap} = \beta_{ap}\cdot c;$$ $$\frac{\mathrm{v}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} = \beta_{ap}\cdot c;\ \beta_{ap} = \frac{\frac{\mathrm{v}}{c}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta};\ \beta = \frac{\mathrm{v}}{c};$$ $$\beta_{ap} = \frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} = f(\theta),$$	2,00	

astfel încât, impunând condiția de maxim pentru această funcție, rezultă: $$\frac{d\beta_{ap}}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\right)=0;$$ $$\frac{\beta\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}-\frac{(\beta\sin\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}=0;$$ $$\beta\cos\theta(1-\beta\cos\theta)^2=(1-\beta\cos\theta)(\beta\sin\theta)^2;$$ $$\cos\theta(1-\beta\cos\theta)=\beta\sin^2\theta;$$ $$\cos\theta=\beta,$$ astfel încât: $$\beta_{ap,max}=\frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2}=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$\mathrm{v}_{ap,max}=c\beta_{ap,max}=\frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \mathrm{v}_{ap,max}=\frac{c\frac{\mathrm{v}}{c}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}_{ap,max}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}_{ap,max}^2}{c^2}}};\ \mathrm{v}_{ap,max}=3{,}6\cdot c;\ \ \mathrm{v}\approx 0{,}96\cdot c,$$ reprezentând viteza reală a jetului incandescent relativist.		
Oficiu		**1,00**