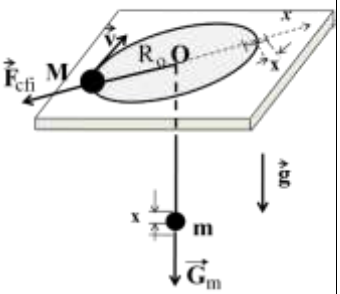
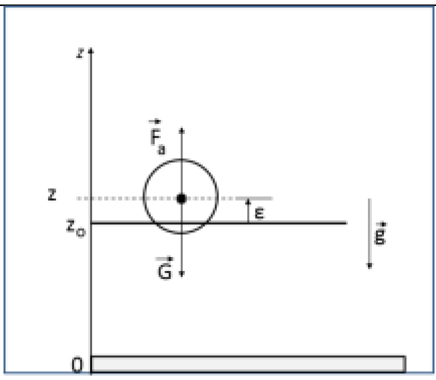
Olimpiada Națională de Fizică
Vaslui 2015
Proba teoretică - BAREM

XI

Problema I

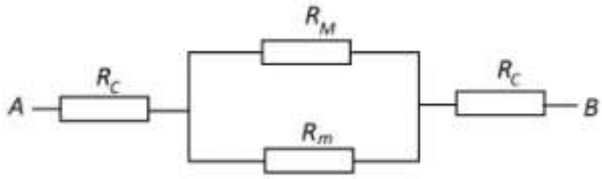
<table>
<tr><th></th><th>punctaj parțial</th><th>punctaj total</th></tr>
<tr><td>Sistemul din figură este în stare de echilibru în timpul rotației, R_o fiind raza cercului descris de corpul cu masa M.


Condiția de stabilitate a traiectoriei de mișcare a sistemului o determinăm considerând că, aplicând o forță sistemului de-a lungul verticalei, după încetarea acțiunii acesteia sistemul revine de la sine la starea inițială. Forța aplicată nu are moment față de O ceea ce face ca de fiecare dată să se conserve momentul cinetic.
$$L_o = L_r\,, M\omega_o R_o^2 = M\omega(R_o \pm r)^2\,, \omega = \omega_o\left(\frac{R_o}{R_o \pm r}\right)^2$$</td><td>0,5</td><td rowspan="5">1</td></tr>
<tr><td>Vom calcula de fiecare dată $F_{revenire}$ a sistemului spre poziția de echilibru:
$$F_{revenire} = mg - F_{r,cfi}\,, \quad mg = F_{o,cfi} = M\omega_o^2 R_o$$
$$F_{revenire} = M\omega_o^2 R_o - M\omega^2(R_o \pm r) = M\omega_o^2 1 R_o\left(1 - \frac{R_o}{R_o \pm r}\right)^3$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Ce se poate observa este faptul ca forța rezultantă este totdeauna orientată spre poziția de echilibru ce coincide cu centrul de rotație, punctul O.
Față de corpul cu masa M,
$$F_{o,cfi} - G_m = 0, \frac{Mv_o^2}{R_o} = mg,\ M\omega_o^2 R_o = mg$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Producând o mică perturbație asupra sistemului pe verticală în jos (acțiune asupra corpului de masă m) duce la o modificare (scădere) a razei de rotație a corpului M cu o cantitate x<< R_o. Ca urmare forța de revenire a sistemului spre poziția de echilibru va fi:
$$F_{revenire} = F_{x,cfi} - G_m\,, F_{revenire} = M\omega^2(R_o - x) - mg = M\omega^2(R_o - x) - M\omega_o^2 R_o.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Întrucât mișcarea se face în lungul razei de rotație forța perturbatoare nu are moment față de O cea ce face ca :
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M_F = 0, \Delta L = 0, L_o = L.$$
$$Mv_o R_o = Mv(R_o - x), \omega_o R_o^2 = \omega(R_o - x)^2\,, \omega = \omega_o\left(\frac{R_o}{R_o - x}\right)^2$$
Înlocuind obținem:</td><td>0,5</td></tr>
</table>

$F_{revenire}=M\omega_o^2\frac{R_o^4}{(R_o-x)^4}(R_o-x)-M\omega_o^2R_o=M\omega_o^2R_o\left[\left(\frac{R_o}{R_o-x}\right)^3-1\right]=M\omega_o^2R_o\left[\left(\frac{1}{1-\frac{x}{R_o}}\right)^3-1\right]$	0,5	
Dezvoltând ecuația și ținând seama de condițiile impuse obținem forma finală a $F_{revenire}=M\omega_o^2R_o\left[\left(1-\frac{x}{R_o}\right)^{-3}-1\right];\ M\omega_o^2R_o\left(1+3\frac{x}{R_o}-1\right)=3M\omega_o^2\ x$ $F_{revenire}=3M\omega_o^2x\text{, unde: }k_{ech}=3M\omega_o^2$ $\omega_{osc}^2=\frac{k_{ech}}{M+m}=\frac{3\omega_o^2}{1+\frac{m}{M}}$ Ținând seama de condiția de echilibru: $F_{cfi}-G_m=0\ ,\ \omega_o^2=\frac{mg}{MR_o},\omega_{osc}^2\frac{3}{1+\frac{m}{M}}\cdot\frac{mg}{MR_o}\ ,\ T_{osc}=2\pi\sqrt{\frac{R_o\left(1+\frac{M}{m}\right)}{3g}}$	0,5 0,5	3
$\frac{T_{osc}}{T_o}=n,\ \frac{\omega_o}{\omega_{osc}}=\frac{T_{osc}}{T_o}=n,\ n^2=\frac{1+\frac{m}{M}}{3},\ \frac{m}{M}=3n^2-1$ $\frac{m}{M}\in\{2,11,26,...\}$	**0,5** **0,5**	**1**
 1. $ma=F_a-mg,\ ma=\rho(z)gV-mg$ $F_{ao}=mg=\rho_o gV$ Pentru gazul din balon ecuația termică de stare este: $p=\frac{\rho}{\mu}RT\text{, iar }T=T_o+c(z-z_o)$	**0,5**	

$$\rho(z)=\frac{p\mu}{R\left[T_o+c(z-z_o)\right]}=\frac{\rho_o}{1+\frac{c}{T_o}(z-z_o)}=\rho_o\left[1+\frac{c}{T_o}(z-z_o)\right]^{-1}$$	**0,5**	
Ecuația de mișcare este: $$ma=\rho(z)gV-\rho_o gV=\left[\rho(z)-\rho_o\right]gV\ ,\ m=\rho_o V\ ,$$ $$\frac{c}{T_o}(z-z_o)<<1$$ $$a=\frac{g}{\rho_o}\left[\rho(z)-\rho_o\right]=g\left[\frac{\rho(z)}{\rho_o}-1\right]$$	**0,5**	**2**
$$a=g\left\{\left[1+\frac{c}{T_o}(z-z_o)\right]^{-1}-1\right\};-g\frac{c}{T_o}(z-z_o)=-g\frac{c}{T_o}\varepsilon$$	**0,5**	
$$\omega_o^2=g\frac{c}{T_o}\ ,\ \omega_o=\sqrt{g\frac{c}{T_o}}$$		
2. Presiunea variază cu înălțimea : $$p(z)=p_o-\rho g(z-z_o)\ ,\ T=T_o+c(z-z_o)$$ Din ecuația termică de stare : $$\rho(z)=\frac{p\mu}{RT}=\frac{p_o\mu}{RT_o}\frac{1-\frac{\rho g(z-z_o)}{p_o}}{1+\frac{c(z-z_o)}{T_o}}=\rho_o\left[1-\frac{\rho g(z-z_o)}{p_o}\right]\left[1+\frac{c(z-z_o)}{T_o}\right]^{-1}=\rho_o\left[1-\left(\frac{\rho g}{p_o}+\frac{c}{T_o}\right)(z-z_o)\right]$$	**1**	**2**
$$a=-\omega^2\varepsilon\ ,\ \omega^2=g\left(\frac{\rho g}{p_o}+\frac{c}{T_o}\right)\Rightarrow\omega=\sqrt{g\left(\frac{\rho g}{p_o}+\frac{c}{T_o}\right)}$$	**0,5**	
$$\omega^2=\frac{\rho_o g^2}{p_o}+\frac{cg}{T_o}=\omega_o^2+\frac{g^2\mu}{RT_o}\ ,\ \omega=\sqrt{\omega_o^2+\frac{g^2\mu}{RT_o}}$$	**0,5**	
Oficiu		**1**

Problema II

	punctaj parțial	punctaj total
I. a Pentru modelarea situației se poate împărți mental cilindrul mare în trei porțiuni de asemenea cilindrice cu lungimile $((L-b)/2), b, ((L-b)/2)$. Se poate imagina cilindrul reprezentând defectul ca fiind un rezistor ideal R_m dispus în paralel cu zona centrală „cu gaură” din cilindrul mare având aceeași lungimea b . Această porțiune din cilindrul mare are rezistența R_M . În serie cu acest ansamblu paralel , de o parte și de alta, se află rezistențele echivalente R_C ale porțiunilor dinspre capete din cilindrul mare. Schema echivalentă este prezentată în figura alăturată.  	0,5 0,5 (expli-cațiile)	1
I. b Evident, $R_c = \dfrac{L-b}{2 \cdot \sigma_M \cdot \pi \cdot R^2}$ $R_m = \dfrac{b}{\sigma_D \cdot \pi \cdot b^2} = \dfrac{1}{\sigma_D \cdot \pi \cdot b}$ $R_M = \dfrac{b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot (R^2 - b^2)}$	0,2 0,1 0,2	**0,5**
I. c Rezistența echivalentă măsurată între capetele A și B ale circuitului echivalent are valoarea $R_D = R_C + \left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_M}\right)^{-1} + R_C$ Cu substituțiile necesare rezultă că $R_D = \dfrac{L-b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} + \left(\dfrac{\pi \cdot b^2 \cdot \sigma_D}{b} + \dfrac{\sigma_M \cdot \pi \cdot (R^2 - b^2)}{b}\right)^{-1} =$ $= \dfrac{L-b}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} + \dfrac{b}{\pi} \cdot \dfrac{1}{R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}$ $R_D = \dfrac{L \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)) - b \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M) - R^2 \cdot \sigma_M)}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M))}$ $R_D = \dfrac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} - \dfrac{b^3}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \dfrac{(\sigma_D - \sigma_M)}{R^2 \cdot \sigma_M + b^2 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}$	0,3 0,3	**1,5**

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Ținând seama de condițiile impuse din enunț ($L >> R >> b$) și cum $\sigma_D \approx \sigma_M$ relația de mai sus devine $R_D = \dfrac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2} - \dfrac{b^3 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}{\sigma_M^2 \cdot \pi \cdot R^4}$ Rezistența cilindrului fără defect are evident valoarea $R_M = \dfrac{L}{\sigma_M \cdot \pi \cdot R^2}$ astfel că $\Delta R = R_M - R_D = \dfrac{b^3 \cdot (\sigma_D - \sigma_M)}{\sigma_M^2 \cdot \pi \cdot R^4}$	0,3 0,3 0,3	
II. A. a După scurtcircuitarea barelor metalice pentru fiecare dintre cele două sfere metalice apare pentru un interval de timp foarte scurt, mult mai scurt decât timpul în care mișcarea pendulului devine perceptibilă, un curent electric de descărcare a cărui valoarea instantanee este $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ Trecerea curentului prin segmentele metalice care leagă cele două sfere cu firul elastic determină apariția unei forțe electromagnetice. Pentru o porțiune de lungime dx dintr-unul dintre segmente forța determinată de trecerea curentului are expresia $dF = B_0 \cdot i(t) \cdot dx$ Dacă porțiunea dx din segmentul conductor se află la distanța x (cu $0 \le x \le R$) de firul de suspensie, momentul determinat de trecerea curentului prin porțiunea considerată are expresia $dM = B_0 \cdot i(t) \cdot x \cdot dx$ Momentul mecanic total determinat de acțiunea curentului de descărcare asupra uneia dintre bare are expresia $M = B_0 \cdot i(t) \cdot \dfrac{R^2}{2}$ Momentul mecanic determinat de cele două bare are expresia $M_T = B_0 \cdot i(t) \cdot R^2$ Momentul de inerție al barei cu sferele la capete este $J = 2m \cdot R^2$ și pentru o viteză unghiulară ω momentul cinetic are expresia $L = J \cdot \omega = 2m \cdot R^2 \cdot \omega$ (Se poate accepta și expresia identică obținută prin scrierea $\vec{L} = \vec{r} \times p$ unde $\vec{p}$ este impulsul fiecărei sfere.) Variația în timp a momentului cinetic are expresia $\dfrac{dL}{dt} = J \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = 2m \cdot R^2 \cdot \dfrac{d\omega}{dt}$	0,1 0,2 0,2 0,2 0,1 0,1	**1,5**

Acțiunea momentului asupra barei suspendate conduce la variația în timp a momentului său cinetic. $\frac{dL}{dt}=M_T$ adică $\frac{dL}{dt}=2m\cdot R^2\cdot\frac{d\omega}{dt}=M_T=B_0\cdot i(t)\cdot R^2=B_0\cdot\frac{dq}{dt}\cdot R^2$ În final, $2m\cdot\frac{d\omega}{dt}=B_0\cdot\frac{dq}{dt}$ și considerând variațiile de sarcină și ale vitezei unghiulare pentru tot intervalul de timp în care s-a făcut descărcarea rezultă $\Delta\omega=(\omega_0-0)=\frac{B_0}{2m}\cdot\Delta q=\frac{B_0}{2m}\cdot(0-q_0)$ și deci $\omega_0=-q_0\cdot\frac{B_0}{2m}$	0,2 0,2 0,2	
II. A. b Pendulul de torsiune are ecuația de mișcare $J\cdot\varepsilon=-k\cdot\alpha$ și cum pentru cazul dat $J=2m\cdot R^2$ ecuația de oscilație se poate scrie ca $\ddot{\alpha}+\frac{k}{2m\cdot R^2}\cdot\alpha=0$ Soluția ecuației de oscilație este $\alpha(t)=A\cdot\sin(\Omega\cdot t+\varphi)$ În expresie $\frac{k}{2m\cdot R^2}=\Omega^2$ Evident, $\dot{\alpha}(t)=A\cdot\Omega\cdot\cos(\Omega\cdot t+\varphi)$ Condițiile inițiale pentru oscilator sunt $\begin{cases}\alpha(0)=0\\ \dot{\alpha}(0)=\omega_0\end{cases}$ Rezultă că $\begin{cases}\varphi=0\\ A=\frac{\omega_0}{\Omega}\end{cases}$ și prin urmare ecuația oscilației pendulului de torsiune este	0,3 0,3 0,3 0,15 0,15	**1,5**

$\alpha(t)=\omega_0\cdot R\cdot\sqrt{\frac{2m}{k}}\cdot\sin\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot t\right)$ <u>Notă</u> Momentul forțelor care acționează asupra barelor se poate determina prin divizarea acestora în n segmente de lungime $\frac{R}{n}$ aflate la distanțe $i\cdot\frac{R}{n}$ cu ($(1<i<n)$ față de fir. Ulterior se sumează momentele elementare. Această rezolvare presupune cunoașterea formulei $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$	0,3	
II. B. a Fluxul magnetic definit ca $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$ are pentru situația din problemă expresia $\Phi=(B_0+b\cdot t)\cdot\pi\cdot R^2$ Variația câmpului magnetic conduce la apariția unui câmp electric care acționează asupra sarcinilor electrice de pe sfere. Se consideră un cerc de rază R dintr-un material conductor. Cercul este dispus într-un plan orizontal și are centrul pe firul pendulului de torsiune. Variația fluxului magnetic în acest cerc are expresia $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d((B_0+b\cdot t)\cdot\pi\cdot R^2)}{dt}=\pi\cdot b\cdot R^2$	1	**1**
II. B. b Ca urmare a acestei variații a fluxului în conturul considerat apare tensiunea indusă u_{indus} care are expresia $u_{indus}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\pi\cdot b\cdot R^2$ În contur acționează prin urmare un câmp electric indus a cărui intensitate E_{indus} are expresia $E_{indus}=\frac{u_{indus}}{2\pi\cdot R}=-\frac{b\cdot R}{2}$ Acest câmp se manifestă pe curbe închise din spațiul în care există câmp magnetic variabil. Ținând seama de relația $q_0<<2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2\cdot b\cdot R$ dată în enunț rezultă că $\frac{b\cdot R}{2}>>\frac{q_0}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}$ Câmpul electric indus este mult mai mare decât cea mai mare valoare a câmpului electric generat de sferele încărcate $E_{indus}>>E(r)$ Câmpul electric generat de inducția electromagnetică nu este afectat de câmpul	0,3 0,4 0,2	**2**

electric al sferelor încărcate electric. Asupra fiecărei sfere încărcate cu sarcină electrică va acționa prin urmare forța electrică $F_{electric}$ având expresia $F_{electric} = E_{indus} \cdot q = \frac{b \cdot R}{2} \cdot q_0$ Momentul $M_{electric}$ determinat de cele două forțe electrice are expresia $M_{electric} = q_0 \cdot R \cdot b$ Rotirea α a pendulului de torsiune datorată acestui moment are expresia $\alpha = \frac{q_0 \cdot R \cdot b}{k}$	0,4 0,4 0,3	
Oficiu		**1**

Problema a III-a

		punctaj parțial	punctaj total
a)	Notând perturbația produsă de undă cu y, atunci, conform enunțului $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$, unde A este amplitudinea perturbației, ω - pulsația undei, k - numărul de undă, iar φ_0 - faza inițială. Tangenta la coardă într-un punct este $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = -kA\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, în timp ce viteza de oscilație a elementului de coardă pe care se găsește punctul considerat este $v = \frac{dy}{dt} = \omega A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Utilizând definiția vitezei de fază a undei $c = \frac{\omega}{k}$, din relațiile de mai sus rezultă $tg\alpha = -\frac{v}{c}$, adică $\boxed{\alpha = -arctg\frac{v}{c}}$.	0,2 0,2 0,2 0,2 0,2	**1**
b)	Elementele corzii sunt scoase din starea de echilibru de către componenta transversală a tensiunii, $F = -T\sin\alpha \cong -Ttg\alpha = T\frac{v}{c}$, unde s-a ținut cont de faptul că undele au amplitudine mică. Pe de altă parte, teorema variației impulsului, aplicată unui element de coardă perturbat, se scrie $F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm(v-0)}{dt} = \frac{\mu dx}{dt}v = \mu cv$. Prin urmare $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.	0,50 1 0,50	**2**
c)	Din expresiile de mai sus rezultă că $Z = \frac{T}{c} = \mu c = \sqrt{T\mu}$.	1	**1**
d)	Neglijând disiparea energiei undei, atunci intensitatea acesteia are aceeași valoare în ambele regiuni ale coardei. Expresia intensității undei se scrie $I = \left\langle\frac{\Delta W}{\Delta tS}\right\rangle = \left\langle\frac{\Delta W}{\Delta V}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right\rangle = c\left\langle\frac{\Delta W}{\Delta V}\right\rangle = c\left\langle\frac{\Delta W_c}{\Delta V} + \frac{\Delta W_p}{\Delta V}\right\rangle$.		

	Cum $$\frac{\Delta W_c}{\Delta V}=\frac{\Delta m v^2}{2S\Delta x}=\frac{\mu v^2}{2S}=\frac{\mu}{2S}\omega^2A^2\cos^2(\omega t-kx+\varphi_0),$$ iar $$\frac{\Delta W_p}{\Delta V}=\frac{(\Delta m\omega^2)y^2}{2S\Delta x}=\frac{\mu\omega^2y^2}{2S}=\frac{\mu}{2S}\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi_0),$$ atunci $$I=c\frac{\mu\omega^2A^2}{2S}=\frac{Z}{2S}\omega^2A^2.$$	0,50	
	Prin urmare, $$\frac{Z_1}{2S}\omega^2A_1^2=\frac{Z_2}{2S}\omega^2A_2^2,$$	0,50	2
	sau $$\sqrt{T\mu_1}A_1^2=\sqrt{T\mu_2}A_2^2,$$ de unde $$A_2=A_1\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{1/4},$$	0,50	
	adică $\beta=1/4$.	0,50	
e)	Forța elastică din resort este egală cu componenta transversală a tensiunii din coardă, corespunzătoare coordonatei $x=0$: $$K\Delta y=T_y\big\vert_{x=0},$$	0,50	
	sau $$K[A\cos\omega t-B\cos(\omega t+\varphi_0)]=-T\frac{v}{c}=Z\omega B\sin(\omega t+\varphi_0).$$	1	
	De aici rezultă $$tg\,\varphi_0=\frac{Z\omega}{K}$$	0,75	3
	și $$B=\frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{Z\omega}{K}\right)^2}}.$$	0,75	
	Observație: La înlocuirea resortului cu o tijă rigidă ($K\to\infty$), oscilațiile extremității coardei sunt în fază cu cele ale excitatorului, iar amplitudinile sunt egale.		
	Oficiu		1