Olimpiada Naţională de Fizică
Timişoara 2016
Proba teoretică
Barem

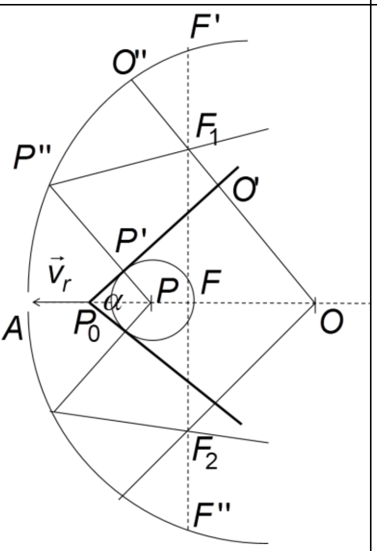
XI

SUBIECTULI Oscilații mecanice nu tocmai obișnuite	10	10
1. $U(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}$ Poziția de echilibru se realizează dacă $U(x)$ are valoare minimă. Se pune deci condiția ca $\frac{dU}{dX}=0$ $\frac{dU}{dx}=-\frac{2a}{x^3}+\frac{b}{x^2}=0$	0,5	4,5
Cu soluția $x_0=\frac{2a}{b}$. Măsurând distanța față de poziția de echilibru și notând-o cu x' $x'=x-\frac{2a}{b}$ expresia fortei $F=-\frac{dU}{dx}=\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}$ devine $F=\frac{2a}{(x'+\frac{2a}{b})^3}-\frac{b}{(x'+\frac{2a}{b})^2}=\frac{2a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^3}\left(1+\frac{bx'}{2a}\right)^{-3}-\frac{b}{\left(\frac{2a}{b}\right)^2}\left(1+\frac{bx'}{2a}\right)^{-2}$	2	
Dacă se presupune că expresia $\frac{bx'}{2a}$ ia o valoare mica, atunci utilizând dezvoltarea binomialăși reținând termeniiîn x' vom obtine: $F=-\frac{b^4x'}{8a^3}$	1	
Aceleratia se poate scrie: $a=\frac{F}{m}=-\frac{b^4x'}{8a^3m}=-\omega^2x'$	0,5	
Unde $\omega=\sqrt{\left(\frac{b^4}{8a^3m}\right)}$ deci, $T=\frac{2\pi}{\omega}=4\pi\sqrt{\left(\frac{2a^3}{b^4}m\right)}$	0,5	

2. În poziția inițială resortul nu este deformat astfel încât în cursul oscilației $E=\frac{1}{2}(m_1+m')(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}(2m_1)(\dot{x}_2)^2+\left[-(m_1+m')gx_1+2(m_1)gx_2+\frac{1}{2}kx_2^2\right]$ $x_1=2x_2$ $E=\frac{1}{2}(m_1+m')(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{4}(m_1)(\dot{x}_1)^2+\left[-g(m_1+m')x_1+m_1gx_1+\frac{1}{8}kx_1^2\right]$ $E=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1+m'\right)(\dot{x}_1)^2+\left[-gm'x_1+\frac{1}{8}kx_1^2\right]$	1,5	
Energia totală este constantă în timp și deci	0,5	
$\frac{dE}{dt}=\left(\frac{3}{2}m_1+m'\right)(\dot{x}_1)(\ddot{x})+\left[-gm'+\frac{1}{4}kx_1\right]\dot{x}_1=0$	0,5	
Prin urmare $\left(\frac{3}{2}m_1+m'\right)\ddot{x}_1+\frac{1}{4}kx_1-m'g=0$ relație care descrie oscilația $\ddot{x}_1+\frac{kx_1}{4\left(\frac{3}{2}m_1+m'\right)}-\frac{m'g}{\frac{3}{2}m_1+m'}=0$	1,5	**4,5**
care are pulsația $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}m_1+m'}}$ și perioada $T=4\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m_1+m'}{k}}$	0,5	
Oficiu	1	**1**

SUBIECTUL II Rățușcă.....cu bile	10	**10**
1. Bile		
a) *Modelarea propagării unei unde mecanice longitudinale într-un mediu omogen* Ciocnirea fiind elastică și masele bilelor egale, după fiecare ciocnire bila ”ciocnitoare” rămâne în repaus iar bila ”ciocnită” pleacă în mișcare cu viteza $\vec{v}_0$. Lungimea șirului este $(n-1)d$. Intervalul de timp în care șirul este parcurs de perturbație este $\Delta t=\frac{(n-1)d}{v_0}$.	0,5	**5**
b) *Modelarea fenomenelor de reflexie și refracție*	0,5	

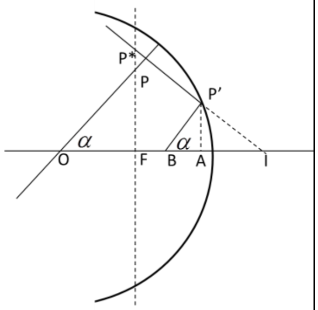
i) Studiind ciocnirea perfect elastică se obțin vitezele $v'_0 = \frac{m-M}{m+M}v_0$, viteza cu care perturbația se întoarce în primul mediu, și $v = \frac{2m}{m+M}v_0$ viteza cu care perturbația se propagă în mediul al doilea. Rezultă că $\Delta t = \frac{d}{2mv_0}\left[m(n+i-1)+(n-i-1)M\right]$.		
ii) $T = \frac{\frac{Mv^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{4mM}{(m+M)^2}$ și $R = \frac{\frac{mv'^2_0}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2$.	1	
c) *Modelarea fenomenelor de reflexie și de refracție în cazul prezenței unui mediu intermediar* i) Analizând ciocnirea dintre ultima bilă de masă m și bila cu masa M' se obține viteza perturbației reflectate în primul mediu $v_r = \frac{m-M'}{m+M'}v_0$ și viteza perturbației transmise în mediul intermediar $v' = \frac{2m}{m+M'}v_0$. Analizând ciocnirea dintre bila de masă M' și bila de masă M obținem viteza bilei M după ciocnire $v_t = \frac{2M'}{M'+M}v' = \frac{4mM'}{(m+M')(M'+M)}v_0$ și viteza bilei M' după ciocnire $v'_r = \frac{M'-M}{M'+M}v' = \frac{2m(M'-M)}{(M'+M)(m+M')}v_0$. Energia transmisă mediului al doilea, $\frac{Mv_t^2}{2}$ este maximă atunci când viteza perturbației în acest mediu este maximă, deci atunci când $\frac{dv_t}{dM'} = 0$. Rezolvând ecuația obținem $M' = \sqrt{mM}$.	1,5	
ii) Înlocuind această valoare în ecuațiile anterioare obținem: $v_r = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{M}}{\sqrt{m}+\sqrt{M}}v_0$, $v_t = \frac{4m}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2}v_0$ și $v'_r = \frac{2\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{M})}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2}v_0$. Cu aceste valori obținem: $T_{\max} = \frac{16mM}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^4}$, $R = \left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{M}}{\sqrt{m}+\sqrt{M}}\right)^2$ și $A = \frac{4\sqrt{mM}(\sqrt{m}-\sqrt{M})^2}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^4}$	0,5	
iii) Înlocuind, obținem: $A+T+R=1$ care este legea de conservare a energiei pentru cazul studiat.	0,5	

Înlocuind, obținem: $A+T+R=1$ care este legea de conservare a energiei pentru cazul studiat.		
iv) Vom calcula variația relativă a coeficientului de transmisie în cele două cazuri: $\frac{T_{max}-T}{T}=\frac{\frac{16mM}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^4}-\frac{4mM}{(m+M)^2}}{\frac{4mM}{(m+M)^2}}=\frac{4(m+M)^2}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^4}-1=\frac{9}{19}$, deci are loc o creștere a energiei transmise cu $\approx 56\%$.	0,5	
2. Rățușca		
a) Dimensiunile vitezei, accelerației gravitaționale și ale adâncimii sunt $[v]=\frac{L}{T}$, $[g]=\frac{L}{t^2}$ și $[h]=L$. Deoarece $v=v(g,h)$, din analiza dimensională rezultă $\frac{L}{t}=\left(\frac{L}{t^2}\right)^{\alpha}L^{\beta}$. Se pot scrie relațiile $1=\alpha+\beta$ și $-1=-2\alpha$. Din cele două relații obținem: $\alpha=\frac{1}{2}$ și $\beta=\frac{1}{2}$, deci $v=\sqrt{gh}$.	1	**4**
b) Considerăm unda de șoc $P_0P'O'$ produsă de rățușcă. Aceasta intersectează axa OA în punctul P_0 , care reprezintă poziția momentană a rățuștii, și este tangentă la frontul de undă cu centrul în P generat la un moment anterior. Distanța $PP_0=v\Delta t$, iar $PP'=v_r\Delta t$. Deoarece triunghiul $PP'P_0$ este dreptunghic putem scrie: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{v_r}=\frac{\sqrt{gh}}{v_r}$, deci $h=\frac{v_r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{g}$.	1	
c) Peretele bazinului se comportă ca o oglindă cilindrică cu raza de curbură R. Având în vedere că suntem în aproximația fasciculelor paraxiale, focarul oglinzii, F, se găsește la jumătatea distanței dinte centrul de curbură al bazinului, O , și deschiderea A. Am reprezentat planul focal $F'FF''$ perpendicular în P pe OA. Considerăm unda de șoc produsă de rățușcă $P_0P'O'$. Aceasta intersectează axa OA în punctul P_0 care reprezintă poziția momentană a rățuștii și este tangentă la frontul de undă cu centrul în P generat la un moment anterior.  PP'', perpendiculară pe P_0O', este una dintre razele care indică deplasarea frontului de undă. Raza $OO'O''$ care trece prin centrul de curbură va fi	2	

reflectată pe aceiași direcție. Punctul în care aceasta intersectează planul focal, F_1, reprezintă punctul prin care vor trece toate razele paralele cu aceasta. Evident că mai există un punct simetric F_2. Se obțin imediat coordonatele celor două puncte: $F_1(\frac{R}{2},\frac{R}{2}ctg\frac{\alpha}{2})$ și $F_2(\frac{R}{2},-\frac{R}{2}ctg\frac{\alpha}{2})$

Demonstrația următoare nu se punctează.

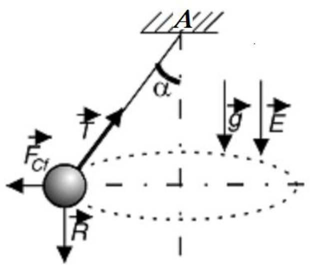
Pentru a demonstra că, în cazul aproximației fasciculelor paraxiale, razele de lumină care provin dintr-un fascicul incident paralel se întâlnesc într-un punct situat în planul focal al oglinzii sferice concave, punct care coincide cu cel în care o semidreaptă (rază) paralelă cu fasciculul și care trece prin centrul de curbură al suprafeței sferice din care face parte oglinda intersectează planul focal vom procedam în felul următor: Considerăm oglinda concavă din figură. În aproximația fasiculelor paraxiale, legea punctelor optic conjugate se scrie sub forma: $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{R}$*. Dacă obiectul se află la distanță foarte mare de oglindă,* $x_1\to-\infty$*, adică razele care provin de la un punct al acestuia sunt paralele, se obține* $x_2=\frac{R}{2}=f$ *iar punctul de pe axul optic principal care se află la această distanță de vârful* V *al oglinzii se notează cu* F *și se numește focarul oglinzii. Planul perpendicular pe axul optic principal care trece prin* F *se numește planul focal al oglinzii. O rază care trece prin centrul de curbură va fi reflectată pe același drum (legile reflexiei: unghiul de incidență este, în acest caz,* $i=0$*, deci și unghiul de reflexie este* $r=0$*). Notăm cu* P *punctul în care această rază intersectează planul focal. Putem scrie relația* $tg\alpha=\frac{FP}{OF}=\frac{FP}{\frac{R}{2}}$*, deci* $FP=\frac{R}{2}tg\alpha$*.*

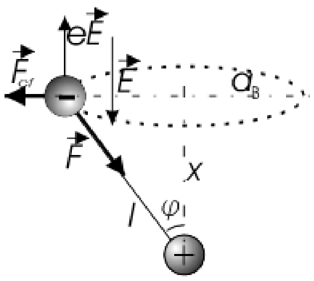


Considerăm un fascicul incident paralel care face unghiul α *cu axul optic principal al oglinzii. Una dintre razele fasciculului intersectează axul optic principal în punctul* B *situat la distanța* a *de vârful oglinzii și este incidentă pe oglindă în punctul* P'*. Această rază se reflectă, conform legii reflexiei, în așa fel încât imaginea punctului* B *în oglindă se va găsi la distanța* b*.*

$\frac{1}{b}+\frac{1}{-a}=\frac{2}{-R}$*, deci putem scrie relația* $a=\frac{Rb}{R+2b}$*. Fie punctul* P^* *intersecția razei reflectate cu planul focal. În continuare vom lucra cu valorile absolute ale lungimilor segmentelor. Este evident că triunghiurile* $P'AI$ *și* P^*FI *sunt*

asemenea. Deoarece suntem în aproximația fasciculelor paraxiale punctele A și V sunt foarte apropiate și putem admite că cele două coincid. Putem scrie $\frac{AP'}{FP^*}=\frac{b}{f+b}$ și $tg\alpha=\frac{AP'}{BA}\cong\frac{AP'}{BV}=\frac{AP'}{a}$. Din cele două relații rezultă că $FP^*=\frac{R}{2}tg\alpha$, deci $FP^*=FP$, deci punctele P^* și P coincid. Deoarece am luat în considerare o rază oarecare din fascicul rezultă că toate razele vor fi reflectate prin același punct din planul focal, punct care coincide cu cel prin care trece o rază paralelă cu fasciculul care trece prin centrul optic.		
Oficiu	1	**1**

SUBIECTUL III Pendule conice electrice	10	**10**
1. Pentru înţelegerea comportamentului dipolilor induşi, se începe cu o modelare mecanică simplă. Corpul de masă m şi sarcină q este supus acţiunii a patru forţe : tensiunea din fir, $\vec{T}$, forţa centrifugă $\vec{F}$, greutatea $\vec{G}=m\cdot\vec{g}$, şi forţa electrică $\vec{F}_E=q\cdot\vec{E}$ - ultimele două acţionând pe aceeaşi direcţie. 	0,5	
În funcţie de sensul şi modulul rezultantei $\vec{R}=\vec{G}+\vec{F}_E$ a acestor doua forţe mişcarea circulară a corpului se desfăşoară: 1. într-un plan care conţine capătul fix A al firului (dacă $\vec{R}=0$), 2. într-un plan aflat sub punctul A dacă $G>F_E$ şi respectiv 3.într-un plan aflat peste punctul A dacă $G<F_E$ şi forţa electrică este îndreptată pe verticală în sus.	0,5	**3**
Dacă r este raza traiectoriei circulare descrise de corp iar x este distanţa dintre planul traiectoriei şi punctul A, condiţia de staţionaritate a mişcării pendulului conic este : $tg\alpha=\frac{r}{x}=\frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{R}$ Perioada mişcării pendulului conic este dată de expresia generală: $\tau=2\pi\sqrt{\frac{m\cdot x}{R}}$	0,5	
Valorile explicite ale perioadei sunt date respectiv de:	0,25	

$\tau_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot x}{m \cdot g + q \cdot E}}$		
pentru cazul forţei electrice îndreptate în jos respectiv $\tau_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot x}{m \cdot g - q \cdot E}}$	0,25	
pentru forţă electrică îndreptată în sus dar mai mică în modul decât greutatea şi $\tau_3 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot x}{-m \cdot g + q \cdot E}}$	0,5	
pentru cazul în care forţa electrică îndreptată în sus este mai mare decât greutatea (caz în care pânza pendulului conic are vârful în jos). Dacă $G = F_E$ mişcarea este circulara pentru orice ω, perioada τ_1 a mişcării fiind deci oarecare.	0,5	
2.1 Într-o modelare foarte simplă, se propune calculul indicelui de refracţie şi a vitezei luminii în hidrogen; Atomul de hidrogen, văzut în modelul Bohr, este alcătuit din nucleu şi un electron care gravitează în jurul nucleului pe o traiectorie circularăcu raza a_B ; la aplicarea unui câmp electric exterior planul traiectoriei electronului se deplasează astfel încât nucleul nu mai este conţinut în acest plan. Dacă - de exemplu - câmpul electric exterior este pulsat, planul traiectoriei oscilează de o parte şi de alta a nucleului rămânând perpendicular pe direcţia câmpului electric; se produce interacţiunea dintre materie şi câmpul electromagnetic. Dipolii electrici apăruţi datorită deplasării planului traiectoriei electronului faţă de nucleu sunt responsabili de proprietăţile dielectrice ale materialului. Când se aplică un câmp electric extern de intensitate $\vec{E}$, planul orbitei electronului din atomul de hidrogen se deplasează pe o distanţă x rămânând perpendicular pe direcţia liniilor de câmp; traiectoria nu-şi modifică forma. Analogia cu pendulul conic de la punctul anterior al problemei se poate face prin punerea în corespondenţă a tensiunii din fir cu forţa de interacţiune electrostatică dintre nucleu şi electron. Staţionaritatea sistemului se realizează dacă :	0,5	**6**
$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\ell} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a_B^2}} = \dfrac{x}{a_B\sqrt{(x/a_B)^2 + 1}} \cong \dfrac{x}{a_B} \\ \cos\varphi = \dfrac{e \cdot E}{F} = \dfrac{e \cdot E}{e^2/(4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell^2)} = \dfrac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot a_B^2}{e} \end{cases}$ 	1	
momentul dipolar apărut datorită deplasării planului orbitei electronului este dat de $p = x \cdot e = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a_B^3 \cdot E$	0,5	
Ţinând cont de ecuaţia de stare pentru gaz, $p_0 \cdot V = N \cdot k_B \cdot T_0$ (N fiind numărul de atomi)	0,5	

polarizarea are expresia : $$P=\frac{p_0}{k_B\cdot T_0}\cdot 4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot E\cdot a_B^3$$	1	
Cum pe de altă parte, aşa cum rezultă din enunţ: $$P=\varepsilon_0\cdot(\varepsilon_r-1)\cdot E$$ rezultă pentru permitivitatea dielectrică relativă a gazului expresia: $$\varepsilon_r=\frac{p_0}{k_B\cdot T_0}\cdot 4\pi\cdot a_B^3+1$$	1	
Hidrogenul nu are proprietăţi magnetice speciale ($\mu_r=1$ - conform enunțului), astfel că viteza luminii în gazul de hidrogen atomic $$c_H=\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}}=\frac{c_0}{\sqrt{1+\frac{4\pi\cdot a_B^3\cdot p_0}{k_B\cdot T_0}}}\cong c_0\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\cdot a_B^3\cdot p_0}{k_B\cdot T_0}\right)$$ În expresie, $$c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}}$$	1	
2.2 Rezultatul numeric rezultând din formula de mai sus este , $$c_H\cong c_0\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\cdot a_B^3\cdot p_0}{k_B\cdot T_0}\right)=2{,}99785 m/s$$ Valoare careeste într-o concordanţă remarcabil de bună cu măsurările de indice de refracţie pentru hidrogen, certificând faptul că modelul simplu propus şi utilizat în problemă este corect	0,5	
Oficiu	1	**1**

© Baremepropuse de:
Profesor Ion TOMA - ColegiulNaţional „MihaiViteazul", Bucureşti
ProfesorViorelSolschi- ColegiulNaţional „MihaiEminescu", Satu Mare
Conf. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de fizică, UniversitateaBucureşti

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.