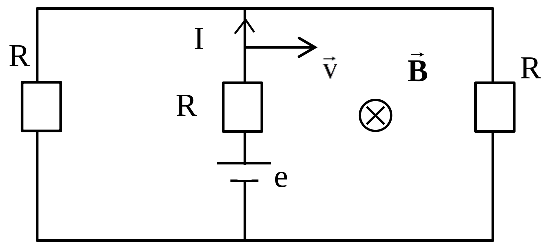
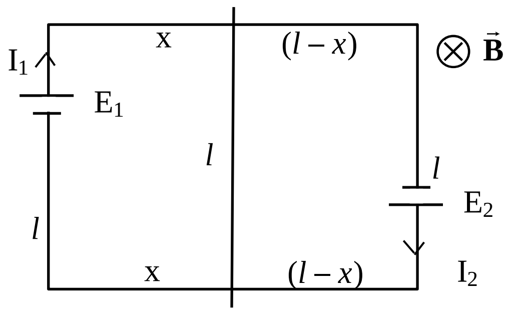
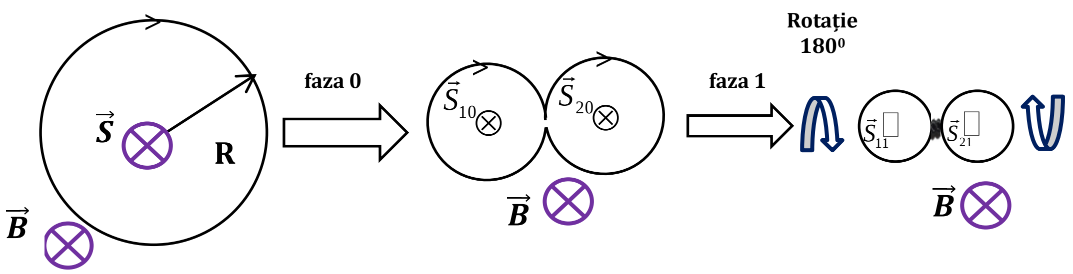
Olimpiada Naţională de Fizică
Breaza 2018
Barem proba teoretică

XI

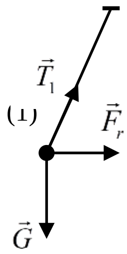
Subiectul I– Curenți în câmp magnetic	Parţial	Punctaj
Barem subiect	10p	**10p**
I.1. La deplasarea barei se induce o tensiune electromotoare la capetele ei e=Blv generând prin ea un curent de intensitate I. Circuitul echivalent electric este:  $I=\dfrac{e}{R+\dfrac{R^2}{2R}}=\dfrac{2e}{3R}=\dfrac{2BSv}{3\rho}$ .... $I=2A$ .... $W=R_{total}I^2t=\dfrac{3R}{2}\left(\dfrac{2Blv}{3R}\right)^2\dfrac{l}{v}=\dfrac{2B^2l^2Sv}{3\rho}$ .... Numeric: $W=10mJ$	0,50p 0,50p 0,75p 0,25p 0,75p 0,25p	**3p**
I.2. Circuitul echivalent electric cu pozitionarea convenabilă pentru poziţia de echilibru este:  Condiţia să fie în echilibru bara este ca prin ea curentul să fie nul astfel ca forţa electromagnetică să fie şi ea nulă. Punem condiţia ca I prin bară să fie nul: $\begin{cases} I=0 \\ E_1=\dfrac{2I_1x\rho}{S}+\dfrac{lI_1\rho}{S} \\ E_2=\dfrac{2I_2(l-x)\rho}{S}+\dfrac{lI_2\rho}{S} \end{cases}$	0,50p 0,50p	**2p**

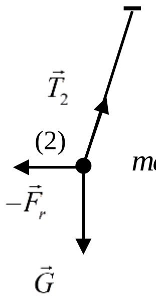
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

În acest caz $I_1 = I_2$ pe conturul exterior $x = \frac{3E_1 l - E_2 l}{2E_2 + 2E_1}$ x= 0,16 m faţă de latura AB………………………………………….	0,50 p 0,25 p 0,25 p	
c)  a. Sarcina electrică debitată în timpul primei faze de deformare a buclei este $Q_0 = i_0 \Delta t = \frac{\lvert e_0 \rvert}{r}\Delta t = \frac{\lvert \Delta\Phi_0 \rvert}{r}$ $Q_0 = \frac{\left\lvert \vec{B}\left(\vec{S}_{10}+\vec{S}_{20}\right) - \vec{B}\vec{S} \right\rvert}{r} = \frac{B}{r}\left\lvert \frac{2\pi r^2}{4} - \pi r^2 \right\rvert = \frac{\pi B R^2}{2r}$ $N_0 = \frac{Q_0}{e} = \frac{\pi B R^2}{2re}$ b. Fie S_{1k} şi respectiv S_{2k} suprafeţele buclelor după desfăşurarea fazei k $S_{11} = S_{21} = \left(\frac{2\pi R - \frac{2\pi R}{n}}{4\pi}\right)^2 \pi = \left[\frac{R}{2}(1-\frac{1}{n})\right]^2 \pi = \frac{\pi R^2 (n-1)^2}{4n^2}$ Se calculează sarcina debitată în timpul fazei **1:** $Q_1 = i_1 \Delta t = \frac{\lvert e_1 \rvert}{r}\Delta t = \frac{\left\lvert \vec{B}\left(\vec{S}_{11}-\vec{S}_{10}\right) + \vec{B}\left(\vec{S}_{21}-\vec{S}_{20}\right)\right\rvert}{r} = \frac{2B\left(S_{11}+S_{10}\right)}{r} =$ $= \frac{2B(\frac{\pi R^2 (n-1)^2}{4n^2} + \frac{\pi R^2}{4})}{r} = \frac{B\pi R^2 (\frac{(n-1)^2}{n^2}+1)}{2r} = \frac{\pi B R^2}{2r}(\frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2})$	0,25 p 0,50p 0,25p 0,75 p 0,50p	4p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$N_1 = \frac{Q_1}{e} = \frac{\pi BR^2}{2re}(\frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2})$	0,25p	
c. Suprafeţele celor două bucle după k răsuciri sunt: $S_{1k} = S_{2k} = \left(\frac{2\pi R - \frac{2\pi R}{n}k}{4\pi} \right)^2 \pi = \left[\frac{R}{2}(1 - \frac{k}{n}) \right]^2 \pi = \frac{\pi R^2 (n-k)^2}{4n^2}, k = 1, 2, ..., n.$	0,50 p	
Se calculează sarcina debitată în timpul fazei **k:** $Q_k = i_k \Delta t = \frac{\lvert e_k \rvert}{r}\Delta t = \frac{\left\lvert \vec{B}\left(\vec{S}_{1k} - \vec{S}_{1,k-1}\right) + \vec{B}\left(\vec{S}_{2k} - \vec{S}_{2,k-1}\right)\right\rvert}{r} = \frac{2B\left(S_{1k} + S_{1,k-1}\right)}{r}$	0,25p	
Sarcina totală: $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + ... + Q_N = \frac{\pi BR^2}{2r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{2B}{r}\left(S_{1k} + S_{1,k-1}\right)$	0,25p	
$Q = \frac{\pi BR^2}{2r} + \frac{2B}{r}\left(2\sum_{k=1}^{N} S_{1k} + S_{10} - S_{1N} \right) =$ $= \frac{\pi BR^2}{2r} + \frac{\pi BR^2}{2r} + \frac{\pi BR^2}{rn^2}\sum_{k=1}^{N}(n-k)^2 - \frac{\pi BR^2}{2rn^2}(n-N)^2 =$ $\frac{\pi BR^2}{r} + \frac{\pi BR^2}{rn^2}\sum_{k=1}^{N}(n-k)^2 - \frac{\pi BR^2}{2rn^2}(n-N)^2 =$ $= \frac{\pi BR^2}{rn^2}\left[n^2 + \sum_{k=1}^{N}(n-k)^2 - \frac{(n-N)^2}{2} \right]$	0,25p	
$N_{total} = \frac{\pi BR^2}{ren^2}\left[n^2 + \sum_{k=1}^{N}(n-k)^2 - \frac{(n-N)^2}{2} \right]$	0,25p	
Oficiu	1p	**1p**

<table>
<tr><th>Subiectul 2 – Analiza propagării unei perturbații</th><th>Parţial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>1. Barem subiect</td><td>10p</td><td>10p</td></tr>
<tr><td>a) Pentru un pendul gravitațional, modulul forței de revenire este $F_r = \frac{mg}{\ell}x$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $k_{ech} = m\omega^2$


$ma_1 = -m\omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2)$


$ma_2 = -m\omega^2 x_2 + k(x_1 - x_2)$
$a_1 = -\omega^2 x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2)$; $a_2 = -\omega^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2)$</td><td>0,5p

0,75p+0,75p</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>b)
$x = x_1 - x_2 \Rightarrow a = a_1 - a_2$
$a_1 - a_2 = -\omega^2 x - \frac{2k}{m}x \Rightarrow a + (\omega^2 + \frac{2k}{m})x = 0$
$x' = x_1 + x_2 \Rightarrow a = a_1 + a_2$
$a_1 + a_2 = -\omega^2 x' \Rightarrow a + \omega^2 x' = 0$</td><td>0,75p

0,75p</td><td>1,5p</td></tr>
<tr><td>c)
La $t = 0$ rezultă:
$x_1(0) = A$; $v_1(0) = 0$; $x_2(0) = 0$; $v_2(0) = 0$
$x(0) = A$; $v(0) = 0$; $x'(0) = A$; $v'(0) = 0$
(unde A este amplitudinea oscilației)
rezultă: $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\omega^2 + \frac{2k}{m}}\,t\right)$; $x'(t) = A\cos\omega t$
$x_1(t) = \frac{x + x'}{2}$; $x_2(t) = \frac{x' - x}{2}$
$x_1(t) = \frac{A}{2}[\cos\omega t + \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \frac{2k}{m}}\right)t]$; $x_2(t) = \frac{A}{2}[\cos\omega t - \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \frac{2k}{m}}\right)t]$</td><td>0,5p

0,75p

0,75p</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>d)
$\sqrt{\omega^2 + \frac{2k}{m}} \approx \omega + \frac{k}{m\omega}$
Folosind identitățile trigonometrice:
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
Rezultă: $x_1(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{k}{2m\omega}t\right)\cos\frac{k}{2m\omega}t$
$k \ll m\omega^2 \Rightarrow x_1(t) \approx A\cos\omega t\cos\frac{k}{2m\omega}t$</td><td>0,5p

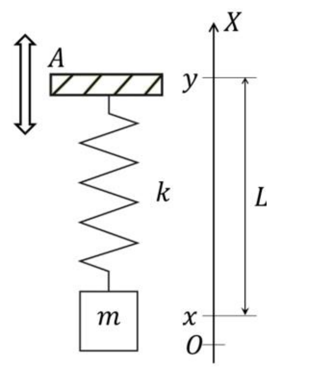
0,5p</td><td>2p</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$x_2(t) = A\sin\omega t\sin\frac{k}{2m\omega}t$ Prin urmare: dacă $\frac{kt}{2m\omega} = \frac{\pi}{2}$ rezultă $x_1(t) = 0$ și $x_2(t) \approx A$ (maximă). $t = \frac{\pi m\omega}{k}$ reprezintă timpul în care oscilația se transmite de la corpul (1) la corpul (2)	0,5p 0,5p	
e) Conform enunțului $\begin{cases} x_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}Acos\omega_1 t + \frac{m_1}{m_1+m_2}Acos\omega t \\ x_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}Acos\omega_1 t + \frac{m_1}{m_1+m_2}Acos\omega t \end{cases}.$ Atunci $x_1 = Acos\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}t\right)cos\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}t\right) + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}Asin\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}t\right)sin\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}t\right)$ și $x_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}Asin\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}t\right)sin\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}t\right).$ Amplitudinea de oscilație a corpului (2) este $A_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}Asin\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}t\right).$ Maximul ei $A_{2,max} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}A$ se realizează pentru $sin\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}t\right) = \pm 1$ În aceste condiții, amplitudinea oscilațiilor corpului (1) este $A_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}A.$	0,5p 0,5p 0,5p	**1,5p**
Oficiu	1p	**1p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

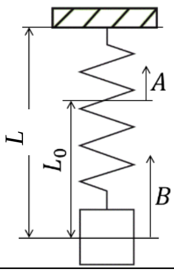
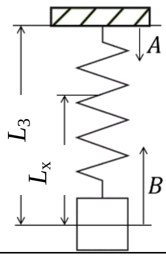
Subiectul al III-lea – oscilaţii forţate

		Punctaj parţial	Punctaj
A			
a)	Alegem axa OX direcţionată de jos în sus (vezi figura 1) cu originea în punctul de echilibru al punctului material. La echilibru, atunci când suportul stă pe loc avem $mg = k\Delta x = k(L - L_0)$, unde L_0 este lungimea nedeformată a resortului. În acest reper poziţia suportului se poate scrie: $y(t) = L + A\sin(\omega t + \varphi)$. Faza φ este introdusă pentru pentru a căuta soluţia mişcării permanente de forma $x = B\sin\omega t$.  **Fig.1** În reperul considerat forta rezultantă care actionează asupra corpului de masă m este: $R = -mg - rv_x + k(y - x - L_0)$ $= -mg - rv_x + kA\sin(\omega t + \varphi) + k(L - x - L_0)$ Ecuatie de mişcare este prin urmare: $ma_x + rv_x + kx = kA\sin(\omega t + \varphi)$ Forma la care trebuie să aducem ecuaţia este $a_x + 2bv_x + \omega_0^2 x = f_0\sin(\omega t + \varphi)$. Din identificarea celor două ecuaţii găsim $\omega_0^2 = k/m$, $2b = r/m$ şi $f_0 = \omega_0^2 A$. Dacă substituim $x = B\sin\omega t$ în această ecuaţie obţinem: $-\omega^2 B\sin\omega t + 2bB\omega\cos\omega t + \omega_0^2 B\sin\omega t$ $= f_0\cos\varphi\sin\omega t + f_0\sin\varphi\cos\omega t$ de unde prin identificare găsim sistemul: $\omega_0^2 B - \omega^2 B = \omega_0^2 A\cos\varphi$ (1) $2bB\omega = \omega_0^2 A\sin\varphi$	**0,25 p.** **0,25 p.** **1 p.** **1p**	**2,5 p.**
b)	De la mişcarea oscilatorie armonică amortizată se cunoaşte că $D = bT'$, unde $T' = \frac{2\pi}{\omega'^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$. Rezultă: $D = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$. pe care o rezolvăm în funcţie de b^2 $b^2 = \frac{\omega_0^2 D^2}{4\pi^2 + D^2} = \frac{4\pi^2 D^2}{T_0^2(4\pi^2 + D^2)}$ Deoarece $b > 0$ deducem:	**0,5 p.** **0,5 p**	**1,5 p.**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$$b=\frac{\omega_0 D}{\sqrt{4\pi^2+D^2}}=\frac{2\pi D}{T_0\sqrt{4\pi^2+D^2}}$$	**0,5 p.**	
c)	Ridicăm la pătrat şi adunăm cele două ecuaţii ale sistemului 1 şi obţinem $$B^2[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4b^2\omega^2]=\omega_0^4A^2$$ ţinem cont în această ecuaţie de $\omega=2\pi/T$, $\omega_0=2\pi/T_0$ şi de (2) $$B^2\left[16\pi^4\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T_0^2}\right)^2+\frac{16\pi^4D^2}{T_0^2T^2(4\pi^2+D^2)}\right]=\frac{16\pi^4}{T_0^4}A^2$$ sau încă $$B^2\left[\left(\frac{T_0^2}{T^2}-1\right)^2+\frac{D^2T_0^2}{T^2(4\pi^2+D^2)}\right]=A^2$$ de unde $$B=\frac{A}{\sqrt{\left(\frac{T_0^2}{T^2}-1\right)^2+\frac{D^2}{4\pi^2+D^2}\cdot\frac{T_0^2}{T^2}}}$$ unde am ales convenţia prin care amplitudinile sunt mărimi pozitive.	**0.3p** **1.2p**	**1,5 p**
d)	În sistemul (1) împărţim prima ecuaţie la a doua şi găsim: $$\boldsymbol{\cot\varphi=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2b\omega}=\frac{(\omega/\omega_0)^2-1}{\frac{2b}{\omega_0}(\omega/\omega_0)}}$$ în care ţinem cont de $\omega=2\pi/T$, $\omega_0=2\pi/T_0$ şi $b=\frac{2\pi D}{T_0\sqrt{4\pi^2+D^2}}$ şi găsim: $$\cot\varphi=\frac{4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T_0^2}\right)}{2b2\pi/T}=\frac{\pi(T_0^2-T^2)}{bTT_0^2}=\frac{(T_0^2-T^2)\sqrt{4\pi^2+D^2}}{2\pi DTT_0}\cong\frac{\pi(T_0^2-T^2)}{DTT_0},$$ în care ultima aproximaţie este corectă în cazul amortizărilor slabe pentru care putem scrie $4\pi^2\gg D^2$.	**0,3 p.** **1,2 p.**	**1,5 p**
e)	Rescriem sistemul (1) în funcţie de parametrii dati: $$\cos\varphi=\frac{B}{A}\frac{(T^2-T_0^2)}{T^2};\ \sin\varphi=\frac{B}{A}\frac{2D}{\sqrt{4\pi^2+D^2}}\frac{T_0}{T}\qquad(1)$$ **În cazul particular:** T_0 =1.00 s, $D=0.1$, A =1 cm şi $T=T_1$ =1.10 s deducem: $\frac{B}{A}=5.74\Rightarrow$ B=5.74 cm Rezultă $\cos\varphi$ =0.9965439 şi $\sin\varphi=$ 0.1661365; $\Rightarrow\varphi$ =9.46° **În cazul particular** T_0 =1.00 s, $D=0.1$, A =1 cm şi $T=T_2$ =0.90 s deducem: $\frac{B}{A}=4.25\Rightarrow$ B=4.25 cm Rezultă $\cos\varphi=-0.997171$ şi $\sin\varphi=$ 0.1503328; $\Rightarrow\varphi$ =171.43°.	**0,25 p.** **0,25 p.**	**0,5 p.**
f)	Invariantul care se foloseşte pentru resorturi obţinute în condiţiile prevăzute în enunţ este $k_iL_i=const.$, unde i este un indice care identifică un resort de lungime L_i a cărui constantă elastică este k_i. Perioadele care ne interesează sunt	**0,2 p**	**0,5 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ şi $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$; Din invariantul menţionat avem: $kL_0 = k_1L_1 = k_2L_2$, $\rightarrow \frac{T_0}{T_1} = \sqrt{\frac{k_1}{k}} = \sqrt{\frac{L_0}{L_1}}$. De unde rezultă $L_1 = L_0\frac{T_1^2}{T^2}$. Similar găsim $L_2 = L_0\frac{T_2^2}{T^2}$. În cazul numeric considerat găsim $L_1 = 1{,}21L_0$ şi $L_2 = 0{,}81L_0$	**0,3 p**	
g)	În cazul unui resort cu $L > L_0$, cu suportul în repaus, punctul de pe resort situat la distanţa L_0 de punctul material oscilează în fază cu punctul material, iar raportul amplitudinilor este: $\frac{B}{A} = \frac{L}{L-L_0} = \frac{1}{1-\frac{L_0}{L}} = \frac{1}{1-\frac{T_0^2}{T^2}} = \frac{T^2}{T^2-T_0^2}$. 	**0,5 p**	**0,5 p**
h)	 Raportul amplitudinilor este: $\frac{B}{A} = \frac{L_x}{L_3-L_x} \Rightarrow L_3 - L_x = L_3\frac{A}{A+B}$.	**0,5 p.**	**0,5 p**
	Oficiu		**1 p.**
	Punctaj total		**10 p.**

Barem propus de:
prof. ***Marian Viorel ANGHEL***, L. Teoretic „Petre Pandrea" Balş
prof. ***Victor STOICA***, ISMB
lect. univ. dr. ***Cornel Mironel NICULAE***, Universitatea din Bucureşti

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultat va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.