Problema 4: Magnet oscilant (10 puncte)

Câmpul magnetic apare în jurul sarcinilor electrice aflate în mișcare. Într-un punct din spațiu câmpul magnetic își manifestă prezența prin exercitarea unei forțe asupra unei sarcini electrice aflate în mișcare prin acel punct.

Un segment infinit mic dintr-un conductor, având lungimea $d\ell$, care este parcurs de un curent electric cu intensitatea I produce – în punctul P aflat în poziția $\vec{r}$ față de el - un câmp magnetic având (conform legii Biot-Savart) inducția $\vec{dB} = \left(\mu_0/(4\cdot\pi)\right)\cdot I\cdot d\vec{\ell}\times\vec{r}/r^3$; în planul care trece prin punctul P și este perpendicular pe direcția conductorului $d\vec{\ell}$ liniile de câmp ale câmpul magnetic produs sunt circulare.

Câmpul magnetic nu are surse; liniile de câmp sunt închise. Pentru magneții permanenți - obiecte cu proprietăți magnetice – există un punct prin care liniile de câmp (care sunt linii închise) ies din obiect și acel punct este numit polul nord și un punct prin care liniile de câmp intră în obiect numit polul sud. Magneții permanenți sunt tratați – din cauza descrierii cu poli – ca fiind structuri dipolare. Prin analogie cu dipolul electric se poate defini un moment magnetic de dipol .

Câmpul magnetic generat de un magnet permanent cilindric este echivalent – la distanțe foarte mari de magnet – cu câmpul magnetic produs de o spiră circulară parcursă de un curent electric constant.
Spira circulară parcursă de curent electric este caracterizată de momentul său magnetic de dipol $\vec{p}_m$. Mărimea momentului magnetic de dipol este definită ca produsul dintre intensitatea I a curentului electric ce străbate spira și aria S a suprafeței acesteia $p_m = I\cdot S$.

Asupra unui segment elementar $d\vec{\ell}$ de fir conductor parcurs de curentul electric cu intensitatea I, aflat într-un punct în care există un câmp magnetic cu inducția $\vec{B}$, acționează forța $d\vec{F} = I\cdot d\vec{\ell}\times\vec{B}$. Schimbarea poziției unei spire circulare parcurse de curent așezată într-un câmp magnetic uniform cu inducția $\vec{B}$ necesită efectuarea unui lucru mecanic care reprezintă variația energiei sale potențiale. Energia potențială U atașată obiectului care are momentul magnetic de dipol $\vec{p}_m$ are expresia $U = -\vec{p}_m\bullet\vec{B}$
Dacă îți este necesar consideră cunoscut că ecuația de mișcare pentru oscilațiile amortizate $\ddot{x} + 2\cdot\beta\cdot\dot{x} + \omega_0^2\cdot x = 0$ are soluția $x(t) = A\cdot\exp(-t/\tau)\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)$ unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ este frecvența oscilațiilor amortizate, iar $\tau = 1/\beta$ este timpul de amortizare. Parametri A,φ pot fi determinați din condiții inițiale.

Sarcina de lucru nr. 1

În cadrul sarcinii de lucru nr. 1 consideră un dipol magnetic constând dintr-o spiră circulară parcursă de curent electric. Momentul magnetic al acestui dipol are mărimea p_m. Axa dipolului este perpendiculară pe planul spirei și trece prin centrul acesteia. Deoarece câmpul magnetic nu are surse, numărul liniilor de câmp magnetic care străbat orice suprafață tridimensională închisă este nul.

1.a.	Demonstrează că inducția câmpului magnetic creat de dipolul magnetic într-un punct A, situat pe axa dipolului la distantă mare de centrul acestuia are expresia $B_z = a \cdot \dfrac{p_m}{z^\alpha}$ (1) unde z reprezintă coordonata punctului A, măsurată în lungul axei dipolului, în raport cu centrul acestuia. Dedu valorile parametrilor a și α, care apar în expresia din relația (1). Presupune că dipolul magnetic este plasat în vid ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Hm^{-1}$).	(2,0p)

1.b.	În cele ce urmează, consideră că dipolul magnetic menționat este plasat într-un câmp magnetic cu simetrie axială, dar neomogen, a cărui inducție magnetică în lungul axei Oz este $B_z(z)$. Dacă axa dipolului coincide cu axa de simetrie a câmpului magnetic, demonstrează că expresia forței cu care câmpul magnetic acționează asupra dipolului este $F_z = c \cdot p_m \cdot \left(dB_z(z)/dz \right)$ (2) și determină valoarea constantei c.	(1,5p)

Sarcina de lucru nr. 2

În cadrul sarcinii de lucru nr. 2, vei analiza oscilațiile unui magnet permanent, cilindric, având masa m și momentul magnetic p_m. Magnetul este prins la capătul unui resort, având constanta de elasticitate k. Magnetul poate oscila de-a lungul unei axe orizontale, având aceeași orientare ca și momentul magnetic. Vei nota elongația oscilației cu ξ. Celălalt capăt al resortului elastic este prins de un suport fix. Consideră că toate forțele de frecare sunt neglijabile.

2.a.	Determină expresia pulsației ω_0 a micilor oscilații ale sistemului magnet-resort, în absența oricăror câmpuri magnetice externe.	(0,5p)

Consideră acum că la distanța z de poziția de echilibru a magnetului prins de resort se plasează un disc metalic mic, în așa fel încât axa de simetrie a magnetului coincide cu axa de simetrie a discului (figura 1).

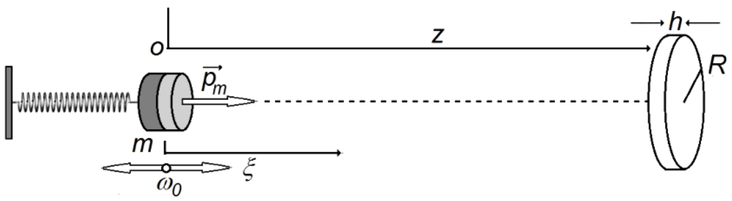

Figura 1

Schița din figura 1 nu este realizată la scară.

Discul având raza R și grosimea h ($h \ll R \ll z$) este menținut fix. Materialul din care este alcătuit discul are conductivitatea electrică σ și permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r \simeq 1$. Magnetul, deplasat pe o distanță mică față de poziția de echilibru și lăsat liber, execută mici oscilații slab amortizate, descrise de legea $\xi(t)$, unde $\xi \ll z$.

2.b.	Dedu expresia forței F exercitată de discul metalic asupra magnetului, care execută mici oscilații slab amortizate. Exprimă rezultatul în funcție de viteza $v = \frac{d\xi}{dt}$ a magnetului și de alte mărimi precizate în enunț.	(4,0p)

2.c.	Scrie ecuația de oscilație a magnetului, în condițiile specificate în cadrul sarcinii de lucru 2.b.	(1,0p)

2.d.	Dedu expresia pentru variația relativă $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ a pulsației oscilației în prezența discului metalic, față de pulsația oscilației libere.	(1,0p)

© *Subiect propus de:* ***Conf. univ. dr. Cristina MIRON***
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI