



### *Problema I (10puncte)*

#### *Estimarea densității pepenelui din fotografie*

Problema de față îți propune ca numai pe baza fotografiei din figura 1 să faci câteva estimări pentru densitatea unui pepene, care plutește într-o găleată cu apă și să analizezi micile oscilații verticale ale pepenelui în găleata cu apă.

În toate estimările pe care le vei face vei considera că pepenele este omogen și că poate fi aproximat printr-o sferă. În diferitele variante de estimare vei neglija sau vei lua în considerare refracția și/ sau efectele tridimensionale.



Figura 1

#### *Sarcina de lucru 1*

Sarcina de lucru 1 îți propune să analizezi factorii care influențează acuratețea determinării densității pepenelui și să faci o primă estimare a densității acestuia, fără a lua în considerare refracția lumini la suprafața aer-apă și efectele tridimensionale.

**1a.** Dedu expresia volumului  $V_0$  al porțiunii din pepene, care este cufundată în apă. Exprimă rezultatul în funcție de raza  $r$  a pepenelui și de raportul  $q = \frac{r_0}{r}$ , în care  $r_0$  reprezintă raza cercului de intersecției a pepenelui cu suprafața apei.

**1b.** Determină expresia densității  $\rho$  a pepenelui în funcție de densitatea  $\rho_0$  a apei și de raportul  $q$ .

**1c.** Reprezintă grafic raportul  $\frac{\rho}{\rho_0}$  în funcție de  $q$ .

**1d.** Utilizând graficul trasat la în cadrul sarcinii de lucru 1c, descrie pe scurt modul în care valoarea raportului  $q$  influențează acuratețea determinării densității  $\rho$ .

**1e.** Estimează densitatea pepenului din fotografia prezentată în figura 1, fără a lua în considerare refracția lumini la suprafața aer-apă și separarea spațială dintre planele orizontale care conțin cercul de intersecție a suprafeței apei cu pepenele și cercul ecuatorial orizontal al acestuia.

### Sarcina de lucru 2

Estimarea realizată în cadrul sarcinii de lucru 1 poate fi îmbunătățită dacă se ține cont de separarea spațială dintre planele orizontale care conțin cercul de intersecție a suprafeței apei cu pepenele și respectiv cercul ecuatorial orizontal al acestuia.

În cadrul acestei sarcini de lucru neglijează fenomenul de refracție a lumini la suprafața aer-apă. Consideră că aparatul cu care s-a realizat fotografia este plasat în poziția  $A$ , la distanța  $h$  față de suprafața apei din găleată și notează raza „aparentă” a pepenului  $BD = r'$  (figura 2). Presupune că aparatul de fotografiat este plasat destul de sus în raport cu suprafața apei din găleată, astfel încât poate să înregistreze latitudini apropiate de cercul ecuatorial al pepenului. În figura 2 suprafața apei este reprezentată prin dreapta ce trece prin punctele  $B, C$  și  $D$ . Schița din figura 2 nu este realizată la scară.

**2a.** Dedu expresia razei  $r$  a pepenului, în condițiile specificate în cadrul acestei sarcini de lucru. Exprimă rezultatul în funcție de  $h, r_0$  și  $r'$ .

**2b.** Estimează densitatea pepenului din fotografia prezentată în figura 1, în condițiile menționate în cadrul sarcinii de lucru 2. Consideră că fotografia a fost realizată de un tânăr cu înălțimea de  $1,70\text{ m}$ , stând în picioare lângă găleata cu diametrul de  $0,30\text{ m}$ . Înălțimea găleții este de  $0,30\text{ m}$ .

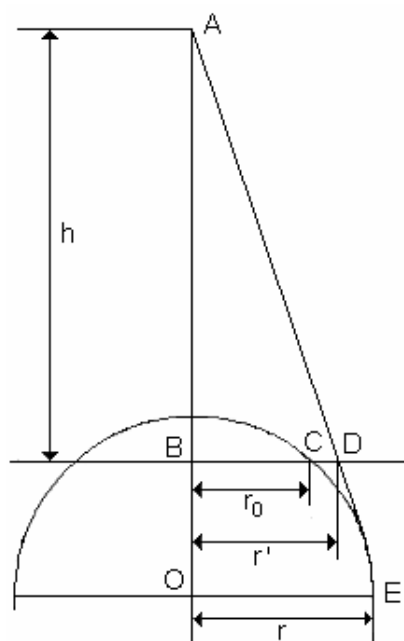


Figura 2

### Sarcina de lucru 3

În cadrul sarcinii de lucru 3 ți se cere să analizezi dacă luarea în considerare a fenomenului de refracție a luminii influențează semnificativ rezultatul estimării densității pepenului, în situația în care ții cont de separarea spațială dintre planele orizontale care conțin cercul de intersecție a suprafeței apei cu pepenele și respectiv cercul ecuatorial al acestuia.

**3a.** Dedu - în condițiile specificate pentru sarcina de lucru 3 - o expresie care să conțină raza  $r$  a pepenului, indicele  $n$  de refracție pentru apă și mărimile  $h, r_0, r'$  a căror semnificație a fost menționată în cadrul sarcinii de lucru 2.

**3b.** Estimează densitatea pepenului din fotografia prezentată în figura 1, în condițiile specificate în cadrul sarcinii de lucru 3. Indicele de refracție al apei este  $n = 4/3$ .

**3c.** Precizează dacă luarea în considerare a fenomenului de refracție influențează în mod semnificativ rezultatul estimării densității pepenului. Argumentează pe scurt răspunsul tău.

### Sarcina de lucru 4

În cadrul sarcinii de lucru 4 ți se cere să analizezi micile oscilații verticale ale pepenului din fotografia prezentată în figura 1.

**4a.** Determină valoarea înălțimii  $h$  a calotei sferice a pepenului, care se află situată în aer – în condițiile estimărilor realizate în cadrul sarcinii de lucru 3b.

**4b.** Determină expresia pulsației micilor oscilații verticale ale pepenului în jurul poziției de echilibru, prezentată în fotografia din figura 1. Exprimă rezultatul în funcție de  $\rho_0, \rho, r, h$  și de accelerația gravitațională  $g$ .

**4c.** Scrie ecuația micilor oscilații verticale ale pepenului, dacă amortizarea acestora este neglijabilă. Exprimă rezultatul în funcție de elongația  $\Delta h$  și de pulsația  $\omega$ .

**4d.** Calculează intervalul de timp necesar efectuării a douăzeci de mici oscilații verticale neamortizate ale pepenului în condițiile estimărilor realizate în cadrul sarcinii de lucru 3b. Consideră că  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### *Estimarea densității pepenului din fotografie – Soluție*

#### *Sarcina de lucru 1*

**1a.** Pentru a determina volumul  $V_0$  al porțiunii din pepene, care este cufundată în apă se consideră sfera ca fiind formată din discuri subțiri orizontale (figura 3), având raza  $r \cdot \sin \theta$  și marginea curbată de lungime  $r \cdot d\theta$ . Un astfel de disc are grosimea  $h' = r \cdot d\theta \cdot \sin \theta$  și volumul

$$dv = \pi \cdot (r \cdot \sin \theta)^2 \cdot r \cdot d\theta \cdot \sin \theta = \pi \cdot r^3 \cdot \sin^3 \theta \cdot d\theta \quad (1)$$

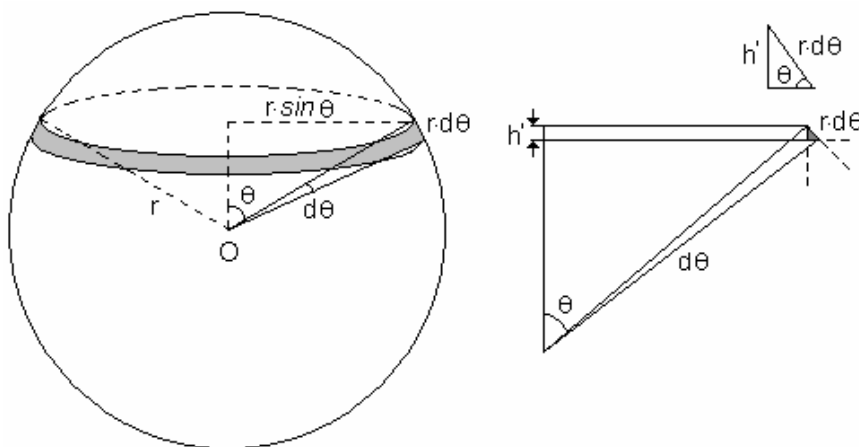


Figura 3

Volumul  $V_0$  al porțiunii din pepene, cufundată în apă este

$$V_0 = \int_{\theta_0}^{\pi} \pi \cdot r^3 \cdot \sin^3 \theta \cdot d\theta \quad (2)$$

Prin prelucrarea relației (2) se obține

$$V_0 = \pi \cdot r^3 \int_{\theta_0}^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \pi \cdot r^3 \int_{\theta_0}^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta - \pi \cdot r^3 \int_{\theta_0}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (3)$$

Fie

$$I_1 = \pi \cdot r^3 \int_{\theta_0}^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta = -\pi \cdot r^3 \cdot \cos \theta \cdot d\theta \Big|_{\theta_0}^{\pi} = \pi \cdot r^3 \cdot (1 + \cos \theta_0) \quad (4)$$

și

$$I_2 = -\pi \cdot r^3 \int_{\theta_0}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (5)$$

În relația (5) făcând schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} u = \cos \theta \\ du = -\sin \theta \cdot d\theta \end{cases} \quad (6)$$

se obține

$$I_2 = \pi \cdot r^3 \int u^2 \cdot du = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{u^3}{3} \quad (7)$$

Prin urmare

$$I_2 = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_{\theta_0}^{\pi} = -\pi \cdot r^3 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \quad (8)$$

Din relațiile (3), (4), (5) și (8) se obține

$$\begin{cases} V_0 = \pi \cdot r^3 \cdot (1 + \cos \theta_0) - \pi \cdot r^3 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \\ V_0 = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \cdot (3 - \cos^2 \theta_0) \right] \end{cases} \quad (9)$$

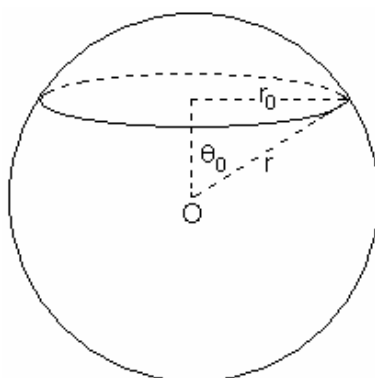


Figura 4

Întrucât este dificil de măsurat unghiul  $\theta_0$  (figura 4) se preferă exprimarea volumului  $V_0$  în funcție de raportul

$$q = \frac{r_0}{r} = \sin \theta_0 \quad (10)$$

Astfel, relația (9) devine

$$V_0 = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ 1 + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}}{2} \cdot \left[ 3 - (1 - \sin^2 \theta_0) \right] \right] \quad (11)$$

respectiv

$$V_0 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{q^2}{2} \right) \sqrt{1 - q^2} \right] \quad (12)$$

Relația (12) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1a.

### **Metodă alternativă de calcul a volumului porțiunii scufundate a pepenelui**

Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $f(x)$  în jurul axei  $Ox$  cu  $a < x < b$ , are expresia

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx \quad (13)$$

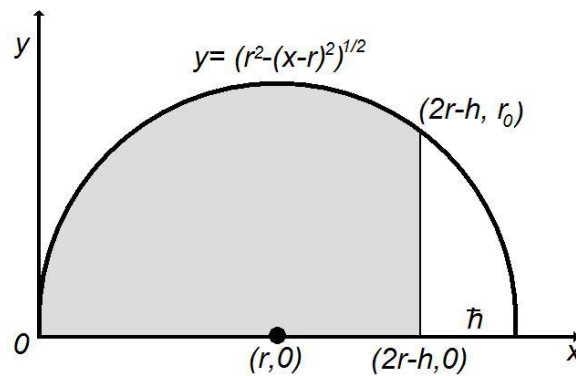


Figura 5

Volumul obținut prin rotirea semicercului cu ecuația

$$\begin{cases} (x-r)^2 + y^2 = r^2 \\ y = \sqrt{r^2 - (x-r)^2} \\ y = \sqrt{r \cdot (2x-r)} \end{cases} \quad (14)$$

este

$$\begin{cases} V_0 = \pi \cdot \int_0^{2r-h} [r^2 - (x-r)^2] \cdot dx \\ V_0 = \pi \cdot \left[ r^2 \cdot x - \frac{1}{3} (x-r)^3 \right] \Big|_0^{2r-h} \\ V_0 = \frac{\pi}{3} \cdot (4r^3 - 3r \cdot h^2 + h^3) \end{cases} \quad (15)$$

În expresie,  $h$  este înălțimea calotei aflate în aer.  
Evident,

$$\begin{cases} r^2 = r_0^2 + (r-h)^2 \\ h^2 - 2r \cdot h + r_0^2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

astfel că

$$h = \frac{2r \pm 2\sqrt{r^2 - r_0^2}}{2} = r \cdot (1 \pm \sqrt{1 - q^2}) \quad (17)$$

Expresia acceptabilă pentru  $h = h(r, q)$  este

$$h = r \cdot (1 - \sqrt{1 - q^2}) \quad (18)$$

astfel că

$$\frac{h}{r} = 1 - \sqrt{1 - q^2} \quad (19)$$

În consecință, relație (15) devine

$$\begin{cases} V_0 = \frac{\pi \cdot r^3}{3} \cdot \left( 4 - 3 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - q^2} \right)^2 + \left( 1 - \sqrt{1 - q^2} \right)^3 \right) \\ V_0 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{q^2}{2} \right) \sqrt{1 - q^2} \right] \end{cases} \quad (20)$$

Relația (20) reprezintă răspunsul pentru 1a.

**1b** Condiția de plutire a pepenului la suprafața apei este

$$\vec{G} + \vec{F}_A = 0 \quad (21)$$

Utilizând expresiile pentru modulul greutatei pepenului și pentru modulul forței arhimedice se obține

$$\rho \cdot V \cdot g = \rho_0 \cdot V_0 \cdot g \quad (22)$$

sau

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{V_0}{V} \quad (23)$$

unde volumul total al pepenului este

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \quad (24)$$

Combinând relațiile (20), (23) și (24) se obține

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{q^2}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - q^2} \right]}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} \quad (25)$$

respectiv

$$\rho = \frac{\rho_0}{2} \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{q^2}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - q^2} \right] \quad (26)$$

Relația (26) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1b.

**1c.** Din relația (26) se obține

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \left( 1 + \frac{q^2}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - q^2} \right] \quad (27)$$

Reprezentarea grafică  $\frac{\rho}{\rho_0} = f(q)$  trasată pe baza dependenței descrise de relația (27) este prezentată în figura 6.

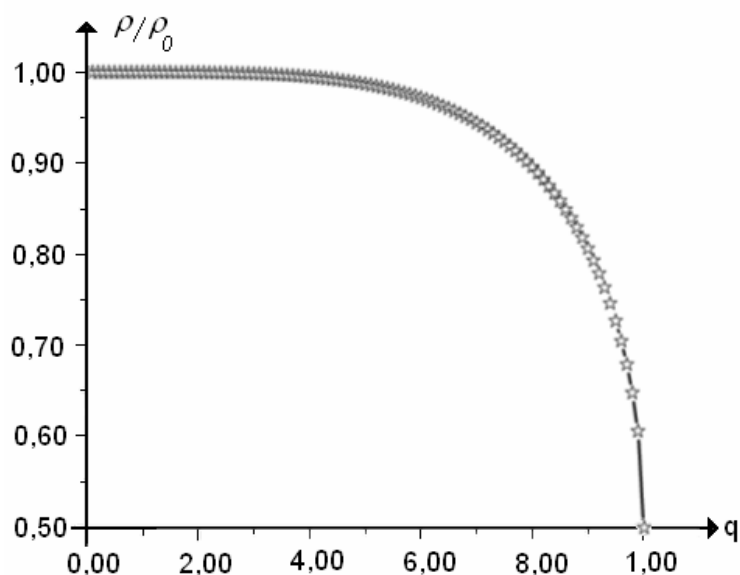


Figura 6

În realizarea reprezentării grafice s-a ținut cont că

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1, \text{ pentru } q = 0 \quad (28)$$

și că

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}, \text{ pentru } q = 1 \quad (29)$$

Prima derivată a funcției analizate, în raport cu variabila  $q$  este

$$\frac{d}{dq} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = - \frac{3 \cdot q^3}{4 \cdot \sqrt{1-q^2}} < 0 \quad (30)$$

Funcția analizată este monoton descrescătoare.

Din condiția de extrem  $\frac{d}{dq} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 0$  se obține

$$q = 0 \quad (31)$$

Derivata secundă a funcției este

$$\frac{d^2}{dq^2} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = - \frac{d}{dq} \left( \frac{3 \cdot q^3}{4 \cdot \sqrt{1-q^2}} \right) = - \frac{3}{4} \left( \frac{3q^2 \sqrt{1-q^2} + q^3 \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}}{1-q^2} \right) < 0 \quad (32)$$

și graficul funcției este concav (nu ține apă).

Tabelul 1 include valorile numerice utilizate în reprezentarea grafică .

Tabelul 1

$q$	$\rho / \rho_0$	$q$	$\rho / \rho_0$
0,05	1,000	0,55	0,980
0,10	0,999	0,60	0,972
0,15	0,999	0,65	0,960
0,20	0,999	0,70	0,944
0,25	0,999	0,75	0,923
0,30	0,998	0,80	0,896
0,35	0,997	0,85	0,858
0,40	0,994	0,90	0,806
0,45	0,991	0,95	0,726
0,50	0,987	1,00	0,500

Reprezentarea grafică din figura 6 reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1c.

**1d.** În conformitate cu reprezentarea grafică din figura 6, curba ce evidențiază dependența  $\frac{\rho}{\rho_0} = f(q)$  descrește lent pentru valori ale raportului  $q$  cuprinse între 0 și 0,70. Pentru acest

domeniu de valori, incertitudinea în determinarea densității  $\rho$  a pepenelui, datorată incertitudinii în determinarea raportului  $q$  este foarte mică și în consecință rezultatele măsurării sunt acurate.

În schimb, pentru domeniul de valori ale variabilei independente  $q$  cuprins între 0,85 și 1,00, graficul  $\frac{\rho}{\rho_0} = f(q)$  descrește rapid. Astfel, variații mici ale variabilei  $q$  conduc la variații

substanțiale ale raportului  $\frac{\rho}{\rho_0}$  și implicit la variații mari ale densității pepenelui. În consecință, în situația în care variabila  $q$  ia valori în intervalul cuprins între 0,85 și 1,00 determinarea densității pepenelui nu mai este acurată.

**1e.** În această primă estimare a densității pepenelui se neglijează atât fenomenul de refracție cât și efectele tridimensionale. Astfel, se presupune că cercul ecuatorial al pepenelui este coplanar cu cercul de intersecție a acestuia cu suprafața apei și prin urmare diametrele celor două cercuri sunt situate în același plan orizontal, la suprafața apei.

Măsurând cu ajutorul unei rigle lungimile celor două diametre se determină

$$q_1 = 0,70 \quad (33)$$

Din relațiile (33) și (27) sau direct din tabelul 1 se obține  $\rho_1 = 0,944 \text{ g} / \text{cm}^3$ . Luând în considerare două cifre semnificative, estimarea pentru densitatea pepenelui este

$$\rho_1 = 0,94 \text{ g} / \text{cm}^3 \quad (34)$$

Valoarea numerică a densității pepenelui din relația (34) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1e.



## Sarcina de lucru 2

**2a.** În situația în care efectele tridimensionale nu mai sunt neglijate, se pune problema găsirii unei modalități de determinare a razei  $r$  a pepenului și a raportului  $q = \frac{r_0}{r}$ , utilizând o fotografie 2D a unui obiect 3D.

Presupunând că aparatul de fotografiat este plasat destul de sus în raport cu suprafața apei din găleată, astfel încât să înregistreze latitudini apropiate de cercul ecuatorial al pepenului se poate aproxima segmentul  $ADE$  ca ipotenuză a triunghiului  $AOE$ ; eroarea datorată acestei aproximații este relativ mică. Conform notațiilor din figura 7 se poate scrie

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{r}{h + \sqrt{r^2 - r_0^2}} \quad (35)$$

În  $\triangle ADB$

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{r'}{h} \quad (36)$$

Prin egalarea expresiilor descrise de relațiile (35) și (36) rezultă

$$\frac{r}{h + \sqrt{r^2 - r_0^2}} = \frac{r'}{h} \quad (37)$$

sau

$$r' \cdot \sqrt{r^2 - r_0^2} = h \cdot (r - r') \quad (38)$$

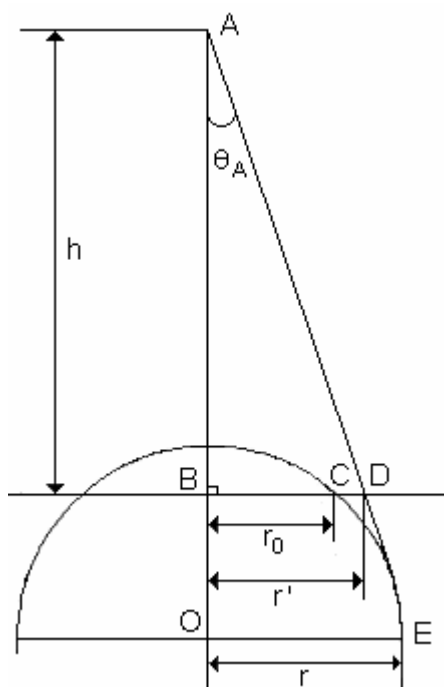


Figura 7

Ridicând la pătrat relația (38) și ordonând-o descrescător după puterile razei  $r$  se obține

$$r^2 \cdot (h^2 - r'^2) - 2 \cdot r \cdot r' \cdot h^2 + r'^2 \cdot (h^2 + r_0^2) = 0 \quad (39)$$

Ecuția (39) are soluțiile

$$r_{1,2} = r' \cdot \frac{h^2 \pm \sqrt{h^2 \cdot (r'^2 - r_0^2) + r'^2 \cdot r_0^2}}{h^2 - r'^2} \quad (40)$$

Conform schiței din figura 7, criteriul de selecție a soluției acceptabile din punct de vedere fizic este  $r > r'$ .

Relația (40) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2a.

**2b.** Estimarea densității pepenului, în condițiile specificate în cadrul sarcinii de lucru 2 se face pe baza relațiilor (10), (26) și (40). Pentru a calcula raza  $r$  a pepenului conform relației (40) este necesară determinarea lungimilor absolute ale razelor  $r_0$  și  $r'$  precum și estimarea valorii pentru înălțimea  $h$ .

În acest scop se măsoară pe fotografie, cu o riglă, diametrul găleții  $D_{1,foto}$ , diametrul cercului de intersecție a suprafeței apei cu pepenele  $D_{2,foto}$  și diametrul aparent al pepenului  $D_{3,foto}$ .

Rezultatele măsurărilor sunt

$$\begin{cases} D_{1,foto} = 7,9 \text{ cm} \\ D_{2,foto} = 4,2 \text{ cm} \\ D_{3,foto} = 2,9 \text{ cm} \end{cases} \quad (41)$$

Lungimile absolute pentru  $r_0$  și  $r'$  se determină ținând cont că diametrul real al găleții este de  $30 \text{ cm}$ . Astfel se obține

$$\begin{cases} r_0 = 5,5 \text{ cm} \\ r' = 8,0 \text{ cm} \end{cases} \quad (42)$$

Conform enunțului, fotografia a fost realizată de un tânăr cu înălțimea de  $1,70 \text{ m}$ , stând în picioare lângă găleată. Se poate estima că în timpul realizării fotografiei, tânărul a ținut aparatul de fotografiat într-o poziție aflată cu  $40 \text{ cm}$  mai jos decât vârful capului. De asemenea, se apreciază că suprafața liberă a apei din găleată este situată la circa  $30 \text{ cm}$  față de podea.

În aceste condiții se estimează că valoarea înălțimii  $h$  este

$$h = 100 \text{ cm} \quad (43)$$

Din relațiile (40), (42) și (43) se obține

$$\begin{cases} r_{1,II} = 8,52 \text{ cm} \\ r_{2,II} = 7,58 \text{ cm} \end{cases} \quad (44)$$

Având în vedere că soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este cea pentru care  $r > r'$ , rezultă că

$$r_{II} = 8,52 \text{ cm} \quad (45)$$

În aceste condiții

$$\begin{cases} q_{II} = \frac{5,50}{8,52} \\ q_{II} \cong 0,65 \end{cases} \quad (46)$$

Efectuând calculele se obține o densitate a pepenului de  $0,961 \text{ g} / \text{cm}^3$ . Luând în considerare două cifre semnificative, estimarea pentru densitatea pepenului este

$$\rho_{II} = 0,96 \text{ g} / \text{cm}^3 \quad (47)$$

„Creșterea” razei ecuatoriale a pepenului datorită considerării efectului spațial, conduce la scăderea valorii parametrului  $q$  și implicit la creșterea valorii determinate pentru densitate. Variația relativă a densității estimate la sarcinile de lucru 1e și 2b este de aproximativ 2% .  
Relația (47) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2b.

### Sarcina de lucru 3

**3a.** În cadrul modelării ce ia în considerație separarea spațială dintre planele orizontale care conțin cercul de intersecție a suprafeței apei cu pepenele și respectiv cercul ecuatorial al acestuia, precum și refracția luminii, raza aparentă a pepenului este  $BD'$  (figura 8).

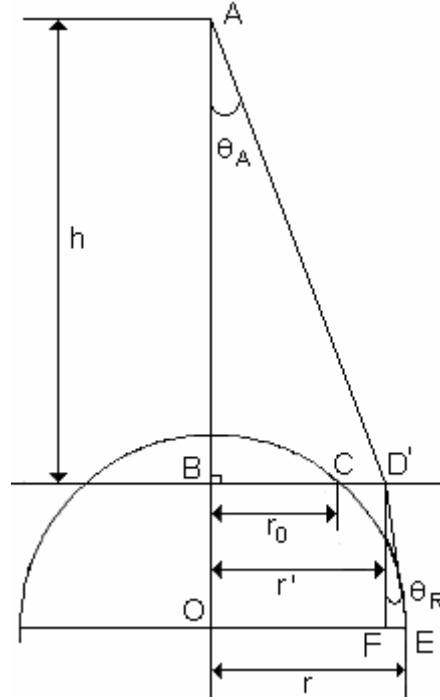


Figura 8

La trecerea luminii din aer ( $n_{aer} \cong 1$ ) în apă

$$\sin \theta_A = n \cdot \sin \theta_R \quad (48)$$

În  $\triangle ABD'$

$$\begin{cases} \sin \theta_A = \frac{BD'}{AD'} \\ \sin \theta_A = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + h^2}} \end{cases} \quad (49)$$

Întrucât aparatul de fotografiat este plasat destul de sus în raport cu suprafața apei din găleată, astfel încât să înregistreze latitudini apropiate de cercul ecuatorial al pepenului se poate aproxima linia  $D'E$  ca ipotenuză a triunghiului  $D'FE$ . Astfel

$$\begin{cases} \sin \theta_R = \frac{EF}{D'E} \\ \sin \theta_R = \frac{EF}{\sqrt{D'F^2 + EF^2}} \end{cases} \quad (50)$$

$$EF = r - r' \quad (51)$$

Având în vedere că

$$D'F = OB \quad (52)$$

și că

$$OB = \sqrt{OC^2 - BC^2} \quad (53)$$

se obține

$$D'F = \sqrt{r^2 - r_0^2} \quad (54)$$

Combinând relațiile (50), (51) și (54) rezultă

$$\sin \theta_R = \frac{r - r'}{\sqrt{r^2 - r_0^2 + (r - r')^2}} \quad (55)$$

Substituind relațiile (49) și (55) în relația (48) se obține

$$\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + h^2}} = n \cdot \frac{r - r'}{\sqrt{r^2 - r_0^2 + (r - r')^2}} \quad (56)$$

Relația (56) sau o relație echivalentă acesteia reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3a.

**3b.** Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuației (56) și ordonând după punerile descrescătoare ale razei  $r$  se obține

$$\left[ n^2 \cdot (h^2 + r'^2) - 2 \cdot r' \cdot [n^2 \cdot (h^2 + r'^2) - r'^2] \cdot r + r'^2 \cdot [n^2 \cdot (h^2 + r'^2) - r'^2 + r_0^2] \right] = 0 \quad (57)$$

Înlocuind în relația (57) valoarea indicelui de refracție al apei

$$n = \frac{4}{3} \quad (58)$$

valorile estimate prin relația (42) pentru razele  $r_0$  și  $r'$  precum și valoarea estimată prin relația (43) pentru înălțimea  $h$  și rezolvând ecuația de gradul al II-lea în raport cu variabila  $r$  se obțin soluțiile

$$\begin{cases} r_{1,III} = 8,38 \text{ cm} \\ r_{2,III} = 7,68 \text{ cm} \end{cases} \quad (59)$$

Întrucât  $r > r'$  soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este

$$r_{III} = 8,38 \text{ cm} \quad (60)$$

În aceste condiții

$$\begin{cases} q_{III} = \frac{5,50}{8,38} \\ q_{III} \cong 0,66 \end{cases} \quad (61)$$

Efectuând calculele se obține o densitate a pepenelui de  $0,959 \text{ g/cm}^3$ . Luând în considerare două cifre semnificative, estimarea pentru densitatea pepenelui este

$$\rho_{III} = 0,96 \text{ g/cm}^3 \quad (62)$$

Relația (62) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3b. Valoarea este identică celeia determinate în ipotezele din cadrul sarcinii de lucru 2b.

**3c.** Compararea valorilor estimate pentru densitatea pepenelui în cadrul sarcinilor de lucru 2b și 3b indică faptul că luarea în considerare a fenomenului de refracție nu influențează semnificativ rezultatul acestei estimări.

### *Sarcina de lucru 4*

**4a.** În condițiile impuse la sarcina de lucru 3, raza sferei care modelează pepenele este  $r = 8,38 \text{ cm}$ , iar valoarea raportului  $q$  este  $q_{III} \cong 0,66$ .

În conformitate cu relația (18), înălțimea calotei pepenelui, care se află situată în aer are valoarea

$$\begin{cases} \hbar_{IV} = 8,38 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - (0,66)^2}\right) \text{ cm} \\ \hbar_{IV} = 2,08 \text{ cm} \end{cases} \quad (63)$$

Valoarea din relația (63) reprezintă răspunsul la sarcina 4a.

**4b.** La o apăsare a pepenelui care produce o cufundare suplimentară  $\Delta \hbar$ ,  $\Delta \hbar \ll \hbar$ , apare o forță îndreptată vertical în sus (forța arhimedică determinată de volumul de lichid dezlucuit suplimentar).

Volumul dezlucuit la echilibru are expresia  $V(\hbar) = (\pi/3) \cdot (4r^3 - 3r \cdot \hbar^2 + \hbar^3)$  unde  $\hbar$  are valoarea  $\hbar_{IV}$  din relația (63).

Pentru o înălțime a calotei situate în aer, având valoarea  $\hbar - \Delta \hbar$  volumul cufundat este notat cu  $V(\hbar - \Delta \hbar)$

Diferența dintre cele două volume este

$$V(\hbar - \Delta \hbar) - V(\hbar) = \frac{dV}{d\hbar} \cdot (-\Delta \hbar) \quad (64)$$

Forța arhimedică  $F_A'$  are expresia

$$F_A' = (V(\hbar) - V(\hbar - \Delta \hbar)) \cdot \rho_0 \cdot g = \rho_0 \cdot g \frac{dV}{d\hbar} \cdot \Delta \hbar \quad (65)$$

Din relația (15) se obține

$$\frac{dV}{d\hbar} = -\pi \cdot \hbar \cdot (2r - \hbar) \quad (66)$$

Din combinarea relațiilor (65) și (66) rezultă

$$F_A' = -\rho_0 \cdot g \pi \cdot \hbar \cdot (2r - \hbar) \cdot \Delta \hbar \quad (67)$$

Această forță este de fapt o forță „de revenire”,  $F_A' = -K \cdot \Delta \hbar$  caracterizată de o „constantă de elasticitate”  $K$ . Din relațiile (66) și (67) se obține

$$K = \rho_0 \cdot g \pi \cdot \hbar \cdot (2r - \hbar) \quad (68)$$

Masa pepenelui este

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho \quad (69)$$

Prin urmare, pulsația micilor oscilații are expresia

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \\ \omega = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{g}{r} \cdot \left[ \frac{\hbar}{r} \left( 2 - \frac{\hbar}{r} \right) \right]} \end{cases} \quad (70)$$

Relația (70) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4b.

**4c.** Ecuația micilor oscilații este

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta h) + \omega^2 \cdot \Delta h = 0 \quad (71)$$

Relația (71) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4c.

**4d.** Valoarea numerică a pulsației este

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0,96} \cdot \frac{981}{8,38} \cdot 0,25 \cdot 1,75} \\ \omega = 6,33 \text{ rad / s} \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} \\ T \cong 1 \text{ s} \end{cases} \quad (73)$$

Intervalul de timp în care pepenele efectuează 20 de oscilații are valoarea

$$t \cong 20 \text{ s} \quad (74)$$

Relația (74) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4d.

*Observație:*

*Pentru a verifica rezultatele estimărilor din această problemă s-a determinat experimental densitatea pepenelui, pentru care a fost realizată fotografia din figura 1. Astfel s-a măsurat masa pepenelui cu ajutorul unui cântar electronic și volumul de apă dislocuit de pepene, când acesta a fost complet cufundat în găleata plină cu apă.*

*Valoarea densității pepenelui, determinată experimental, a fost  $\rho_{\text{exp}} = 0,96 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .*

*Potrivirea perfectă dintre rezultatul estimării densității pepenelui și cel obținut experimental se datorează faptului că pepenele la care face referire această problemă a fost aproape sferic și pentru că densitatea pepenelui este destul de apropiată de unitate. Conform reprezentării grafice*

*din figura 6, valoarea  $\frac{\rho}{\rho_0} = 0,96$  se situează în domeniul pentru care curba  $\frac{\rho}{\rho_0} = f(q)$  descrește*

*lent, astfel că incertitudinea în determinarea densității  $\rho$  a pepenelui, datorată incertitudinii în determinarea raportului  $q$  este foarte mică.*

© Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare și Examinare – MEETS București  
Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București