



Problema a III-a (10 puncte)

Proprietăți ale materialelor paramagnetice

Această problemă îți propune să studiezi câteva dintre proprietățile materialelor paramagnetice. În studiul pe care îl vei face consideră cunoscute: sarcina $-e$ a electronului și masa m^* a acestuia, constanta lui Planck h , magnetonul Bohr-Procopiu $\mu_B = e\hbar/(2m^*)$, constanta Boltzmann k_B .

Sarcina de lucru 1

Modulul momentului magnetic de dipol $\vec{\mu}$ al unei spire circulare cu raza r , străbătută de un curent cu intensitatea i are expresia $|\vec{\mu}| = \pi \cdot r^2 \cdot i$. Momentul magnetic de dipol are direcția perpendiculară pe planul spirei și sensul dat de regula burghiului drept.

1. În modelul planetar al atomului, determină expresia ce evidențiază legătura dintre momentul cinetic orbital \vec{L} al electronului aflat în mișcare circulară în jurul nucleului și momentul său magnetic de dipol $\vec{\mu}$. Momentul magnetic al electronului este un vector coliniar cu momentul cinetic orbital și antiparalel cu acesta, datorită sarcinii negative a electronului.

Sarcina de lucru 2

În modelul cuantic al atomului, stările electronului sunt determinate de numerele cuantice n - numărul cuantic principal, l - numărul cuantic orbital (al momentului cinetic orbital) m - numărul cuantic magnetic și s numărul cuantic de spin. Primele trei numere cuantice sunt numere întregi. În modelul cuantic, n este un număr natural nenul.

Momentul cinetic al electronului din starea caracterizată prin numărul cuantic principal n nu poate lua decât valorile $|\vec{L}| = \hbar \cdot \sqrt{l \cdot (l+1)}$ cu $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Numărul cuantic magnetic cuantifică valorile posibile L_z ale proiecției momentului cinetic orbital pe o direcție din spațiu (având direcția axei Oz) conform expresiei $L_z = m \cdot \hbar$.

2. Pentru un atom aflat în câmp magnetic cu intensitatea \vec{H} determină, în modelul cuantic, valorile posibile θ_m ale unghiului dintre direcția momentului cinetic orbital al electronului aflat în starea cu numărul cuantic orbital l și direcția câmpului magnetic.

Sarcina de lucru 3

Distribuția Boltzmann este o funcție de partiție care descrie probabilitatea de realizare a uneia dintre stările unui sistem care se poate afla în mai multe stări. Pentru un sistem aflat la echilibru termodinamic, compus din N particule distribuite pe i stări având fiecare energia E_i , numărul N_k al particulelor distribuite în starea k are expresia $N_k/N = \exp(-E_k/k_B T)/Z(T)$. În această expresie

$$Z(T) = \sum_{k=1}^i \exp(-E_k/k_B T), \quad k_B \text{ este constanta Boltzmann, iar } T \text{ este temperatura sistemului.}$$

Distribuția Boltzmann se aplică sistemelor cu densitate mică de particule, aflate la temperatură înaltă, pentru care efectele cuantice pot fi neglijate.

3. Determină expresia energiei medii $\langle E \rangle$ a unui sistem de particule care se pot afla într-una dintre cele trei stări, având respectiv energiile $E_k = k \cdot \delta_1 \cdot k_B \cdot T$, unde $k = 1, 2, 3$. Consideră că sistemul de particule este în echilibru termic la temperatura T și că $\delta_1 > 0$ are o valoare cunoscută.

Sarcina de lucru 4

Paramagnetismul este o formă de magnetism pe care o prezintă anumite materiale atunci când sunt dispuse într-un câmp magnetic exterior. Momentul magnetic indus prin aplicarea câmpului exterior depinde liniar de intensitatea câmpului aplicat și este - de regulă - mic. Permeabilitatea magnetică a materialelor paramagnetice este supraunitară.

Consideră un ansamblu de N atomi identici, care nu interacționează între ei. Pe lângă momentul cinetic orbital electronii au și moment cinetic de spin. Interacțiunea spin orbită conduce la necesitatea caracterizării electronului prin momentul cinetic total \vec{J} pentru care valoarea maximă a lui J_z este $j \cdot \hbar$. În această expresie j ia valori întregi sau semiîntregi.

Consideră că sistemul de atomi se află la echilibru termodinamic, caracterizat de temperatura T și că este dispus într-un câmp magnetic uniform care are intensitatea H , orientată pe direcția axei Oz .

Energia E_m atașată unui moment magnetic de dipol dispus într-un câmp magnetic cu intensitatea \vec{H} are expresia $E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}$.

Momentul magnetic de dipol $\vec{\mu}$ asociat fiecărui atom este proporțional cu momentul cinetic total și are expresia $\vec{\mu} = -\left(\frac{e}{2m^}\right) \cdot g \cdot \vec{J}$, unde factorul giromagnetic g este o constantă caracteristică speciei atomice. Și în această situație, numărul cuantic magnetic m cuantifică valorile posibile J_z ale proiecției momentului cinetic total pe o direcție Oz din spațiu, conform expresiei $J_z = m \cdot \hbar$ cu $-j, -j+1, \dots \leq m \leq j-1, j$, în care m poate fi semiîntreg.*

Magnetizarea M a unui sistem este definită ca suma mediilor proiecțiilor momentelor magnetice ale particulelor din sistem.

În rezolvarea cerințelor din cadrul sarcinii de lucru 4, presupune că sistemul este suficient de rarefiat pentru ca intensitatea câmpului magnetic la nivelul fiecărui atom să fie egală cu intensitatea \vec{H} a câmpului magnetic aplicat.

- 4a. Pentru un atom din sistemul considerat, scrie expresia valorilor posibile ale mărimii μ , reprezentând lungimea proiecției momentului magnetic de dipol pe direcția câmpului magnetic aplicat.
- 4b. Scrie expresia energiilor atașate proiecției momentului magnetic de dipol al atomului aflat în câmp magnetic, pentru fiecare dintre stările posibile.
- 4c. Determină expresia valorii medii $\langle \mu \rangle$ a proiecției pe direcția câmpului magnetic a momentului magnetic μ pentru sistemul considerat. Calculează valoarea mediei proiecției momentului magnetic pentru $J = (1/2)\hbar$ și pentru $J = \hbar$.
- 4d. Determină expresia pentru magnetizarea sistemului în situația în care $H \rightarrow \infty$.
- 4e. Determină expresia pentru magnetizarea sistemului în situația în care $H \rightarrow 0$.

Căldura specifică per particulă η se definește ca raportul dintre variația energiei medii per particulă și variația temperaturii sistemului căruia îi aparține particula.

4f. Demonstrează că pentru un sistem caracterizat printr-un spectru cu un număr n finit de energii E_n , pentru cazul în care $E_n \ll k_B \cdot T$ și pentru oricare n , căldura specifică per particulă are expresia $\eta = \sigma^2 / (k_B \cdot T^2)$. Cunoști că varianța spectrală are expresia $\sigma^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$.

4g. Dedu expresia căldurii specifice per particulă pentru un material paramagnetic.

Dacă îți sunt utile, poți folosi relațiile:

$$q + q^2 + \dots + q^n = q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + \dots + n \cdot q^n = q \cdot \frac{1 - (n+1) \cdot q^n + n \cdot q^{n+1}}{(1 - q)^2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\operatorname{ctgh}(x) \cong \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \text{ pentru } |x| \ll 1$$

© Problemă propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare și Examinare – MEETS București
Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București



FOAIE DE RĂSPUNSURI

Problema a III-a (10 puncte)

Proprietăți ale materialelor paramagnetice

Sarcina de lucru 1

1. Expresia ce evidențiază legătura dintre momentul cinetic orbital \vec{L} al electronului aflat în mișcare circulară în jurul nucleului și momentul său magnetic de dipol $\vec{\mu}$

1,0 p

Sarcina de lucru 2

2. Valorile posibile θ_m ale unghiului dintre direcția momentului cinetic orbital al electronului aflat în starea cu numărul cuantic secundar l și direcția câmpului magnetic

1,0 p

Sarcina de lucru 3

3. Expresia energiei medii $\langle E \rangle$ a unui sistem de particule, care se pot afla într-una dintre cele trei stări având respectiv energiile $E_k = k \cdot \delta_1 \cdot k_B \cdot T$, unde $k = 1, 2, 3$

1,0 p

Sarcina de lucru 4

4a. Expresia valorilor posibile ale mărimii μ

0,5 p

4b. Expresia energiilor atașate proiecției momentului magnetic de dipol al atomului aflat în câmp magnetic, pentru fiecare dintre stările posibile

0,5 p

4c. – Expresia valorii medii $\langle \mu \rangle$ a proiecției pe direcția câmpului magnetic a momentului magnetic μ , pentru sistemul considerat

1,6 p

– Valoarea mediei proiecției momentului magnetic, pentru $J = (1/2)\hbar$

0,2 p

– Valoarea mediei proiecției momentului magnetic, pentru $J = \hbar$

0,2 p

4d. Expresia pentru magnetizarea sistemului în situația $H \rightarrow \infty$

0,9 p

4e. Expresia pentru magnetizarea sistemului în situația $H \rightarrow 0$

0,6 p

4f. Căldura specifică per particulă $\eta = \sigma^2 / (k_B \cdot T^2)$ – Demonstrație

1,5 p

4g. Expresia căldurii specifice per particulă pentru un material paramagnetic

1,0 p