Problema a II-a (10 puncte)

Ceea ce Newton n-a ştiut!

Mişcarea de revoluție a Lunii în jurul Pământului este însoțită de o mişcare de rotație a Lunii, în jurul unei axe proprii, sensurile celor două mişcări fiind identice. Elipsa din figura 1 reprezintă traiectoria centrului Lunii, în mişcarea sa, ca rezultat al interacțiunii gravitaționale cu planeta Pământ. În focarul $\mathrm{F_1}$ al acestei elipse se află centrul Pământului. În poziția inițială, centrul Lunii coincide cu perigeul elipsei. După un anumit timp centrul Lunii a ajuns pe elipsă în poziția L, iar raza vectoare $\vec{r}$ a centrului Lunii s-a rotit cu unghiul θ. În acelaşi interval de timp, Luna s-a rotit în jurul axei proprii (perpendiculară pe planul desenului), cu un unghi δ, evidențiat în desen ca fiind unghiul cu care s-a rotit, în planul orbitei Lunii, axa de referință din secțiunea orbitală a Lunii. Ca urmare, direcția axei de referință din planul secțiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei, într-un punct C din apropierea focarului $\mathrm{F_2}$ al acesteia.

Concluzie: atunci când Luna se deplasează în jurul Pământului, punctul C se deplasează de-a lungul axei mari a elipsei, oscilând de o parte şi de cealaltă parte a focarului $\mathrm{F_2}$, evidențiind astfel rolul celui de al doilea focar al elipsei, $\mathrm{F_2}$, rol despre care Newton n-a ştiut!

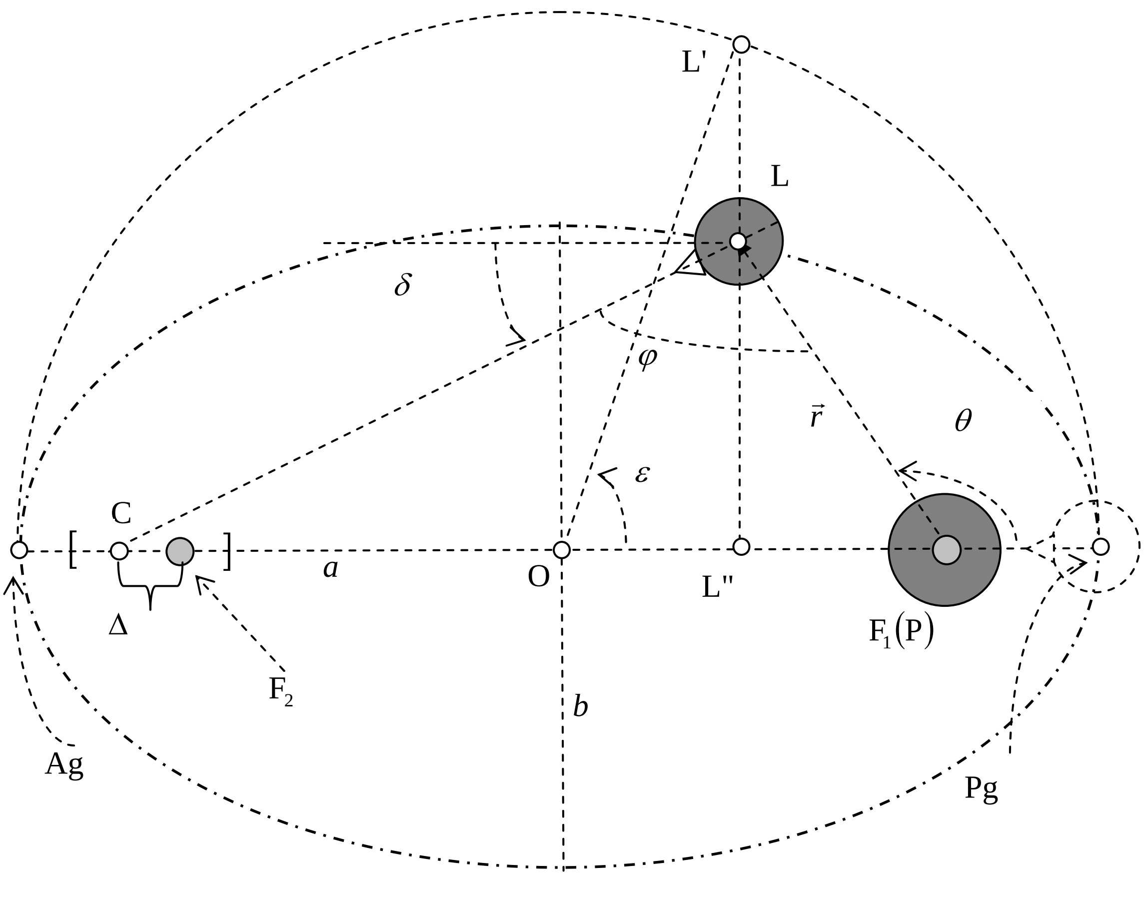


Figura 1

a) Să se determine intervalele valorilor distanței Δ, în stânga şi în dreapta focarului F_2, dacă Δ reprezintă distanța de la punctul C până la focarul F_2, într-un moment oarecare, pe durata deplasării centrului Lunii de la Perigeu, până la Apogeu. Să se analizeze simetria acestor intervale, în raport cu focarul F_2 şi să se interpreteze rezultatul.

b) Să se localizeze pe elipsă, poziția L_0 a centrului Lunii, pentru care direcția axei de referință din planul secțiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei în focarul F_2 al acesteia.

Se ştie că: 1) relația dintre unghiurile θ şi ε, evidențiate în desen, este $\cos\theta = \dfrac{\cos\varepsilon - e}{1 - e\cos\varepsilon}$, unde $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ este excentricitatea numerică a elipsei; 2) aria suprafeței descrisă de raza vectoare a centrului Lunii, până când centrul Lunii a ajuns în poziția L, este $S = \dfrac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)$, unde a şi b sunt cele două semiaxe ale elipsei; 3) semiaxa mare a elipsei este $a = 384.400$ km; 4) pentru că excentricitatea numerică a elipsei este foarte mică, $e \approx 0{,}0549$, se va lucra, acceptând următoarea aproximație:

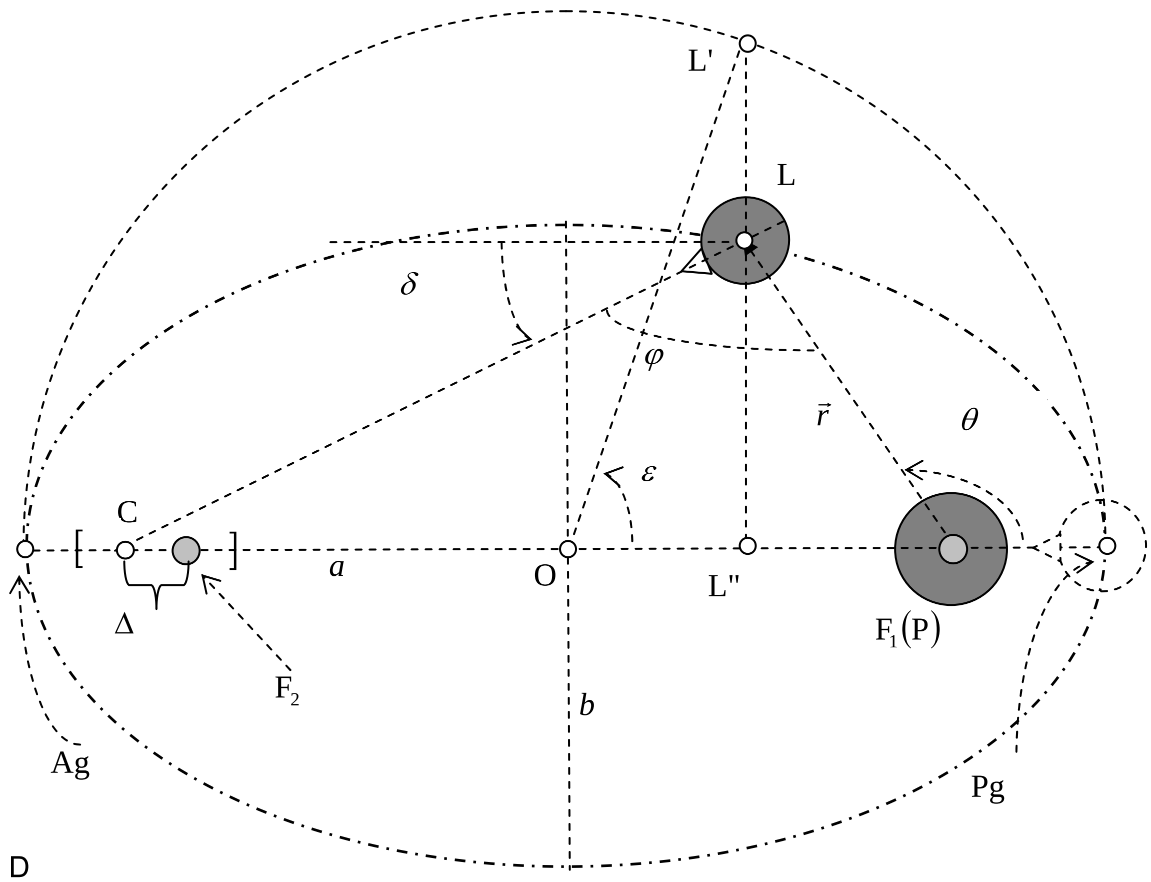
$$f(e) = \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - e - \cos\varepsilon \approx \frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3.$$

© *Problemă propusă de:*

Prof. dr. Mihail Sandu – Călimăneşti

Soluție

a) Vom analiza, pentru început, situația reprezentată în desenul din enunțul problemei, când Luna se află pe orbita eliptică, într-un moment când unghiul δ este mic şi punctul C se află la stânga focarului F_2, aşa cum indică figura alăturată.



acă în intervalul de timp *t*, corespunzător căruia, centrul Lunii se deplasează pe elipsa mare, din poziția L_0 până în poziția L, aria suprafeței descrisă de raza vectoare a centrului Lunii este:

$$S = \frac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon),$$

atunci, în acord cu a II-a lege a lui Kepler, rezultă:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{t}{T},$$

unde *T* este perioada rotației Lunii în jurul Pământului, iar S_0 este aria suprafeței elipsei;

$$S_0 = \pi ab;$$

$$\frac{\frac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{\pi ab} = \frac{t}{T};$$

$$t = \frac{T(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{2\pi},$$

reprezentând durata deplasării centrului Lunii din poziția L_0, până în poziția L.

Dacă viteza unghiulară medie, în mişcarea Lunii pe elipsa mare în jurul Pământului, este:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

iar Ω este viteza unghiulară corespunzătoare rotației Lunii în jurul axei proprii, ştiind că cele două viteze unghiulare sunt egale $(\omega = \Omega)$, atunci, unghiul cu care, în timpul *t*, Luna s-a rotit uniform în jurul axei proprii (egal cu unghiul rotației axei de referință din planul secțiunii orbitale a Lunii), este:

$$\delta = \Omega t = \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{2\pi} = \varepsilon - e\sin\varepsilon.$$

Din triunghiul LCF_1, utilizând teorema sinusurilor, rezultă:

$$\frac{d_{\mathrm{CF_1}}}{\sin\varphi} = \frac{d_{\mathrm{LF_1}}}{\sin(\theta - \varphi)};$$

$$\delta + \varphi = \theta;\ d_{\mathrm{LF_1}} = r;$$

$$d_{\mathrm{CF_1}} = r\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta},$$

astfel încât, pentru intervalul $\Delta = d_{\mathrm{CF_2}}$, care ne interesează, rezultă:

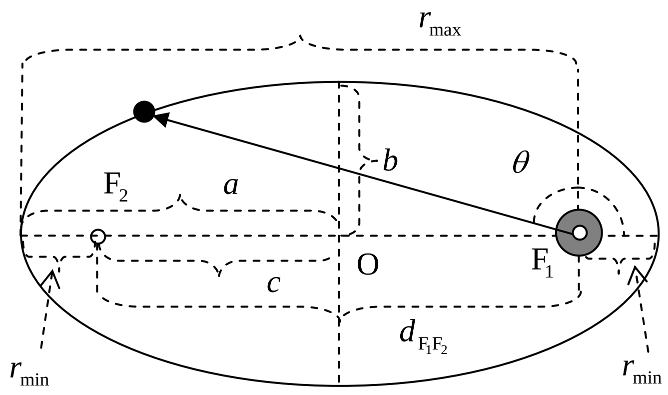
$$\Delta = d_{\mathrm{CF_2}} = d_{\mathrm{CF_1}} - d_{\mathrm{F_1F_2}}.$$

Pentru calculul distanței dintre focarele elipsei, $d_{\mathrm{F_1F_2}}$, utilizând ecuația elipsei în coordonate polare plane şi desenul din figura alăturată, rezultă:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

$$\theta = 0;\ r = r_{\min} = \frac{p}{1+e};$$

$$\theta = \pi;\ r = r_{\max} = \frac{p}{1-e};$$



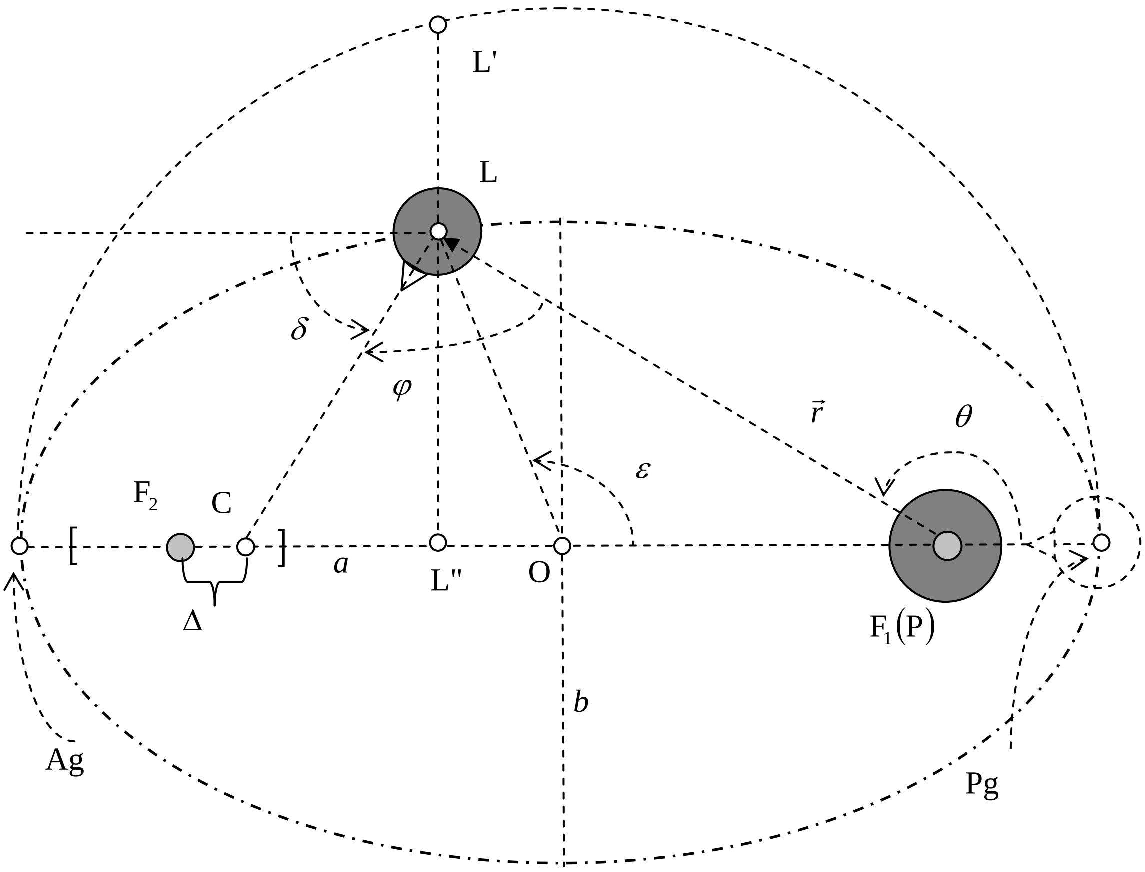
$$r_{\min}+r_{\max}=2a=\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}=\frac{2p}{1-e^2};$$
$$p=a\left(1-e^2\right);$$
$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e);$$
$$c=a-r_{\min}=ae;$$
$$d_{F_1F_2}=2c=2ae.$$

În aceste condiții, pentru intervalul $\Delta=d_{CF_2}$, rezultă:

$$\Delta=d_{CF_1}-d_{F_1F_2}=r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}-2ae;$$
$$\Delta=\frac{p}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}-2ae=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}-2ae;$$
$$\frac{\Delta}{a}=\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}-2e;\ \varphi=\theta-\delta;$$
$$\frac{\Delta}{a}=\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\delta)}{\sin\delta}-2e;$$
$$\frac{\Delta}{a}=\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}(\sin\theta\cot\delta-\cos\theta)-2e;$$
$$\delta=\varepsilon-e\sin\varepsilon;$$
$$\cot\delta=\cot(\varepsilon-e\sin\varepsilon);$$
$$\cos\theta=\frac{\cos\varepsilon-e}{1-e\cos\varepsilon};\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\sqrt{1-e^2};$$
$$1+e\cos\theta=\frac{1-e^2}{1-e\cos\varepsilon};$$
$$\frac{\Delta}{a}=-e+\sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot\delta-\cos\varepsilon;$$
$$\frac{\Delta}{a}=\sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot(\varepsilon-e\sin\varepsilon)-e-\cos\varepsilon;$$
$$\frac{\Delta}{a}\approx\frac{\cos\varepsilon}{2}e^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\cos^2\varepsilon\right)e^3;$$
$$\varepsilon=0;\ e=0{,}0549;$$
$$\frac{\Delta}{a}=\frac{1}{2}0{,}00301401-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right)0{,}000165469;$$

$$\frac{\Delta}{a}=\frac{1}{2}0{,}00301401+\frac{1}{2}0{,}000165469=0{,}00158974;$$
$$a=384.400\ \text{km};$$
$$\Delta=611{,}09\ \text{km},$$
reprezentând distanța maximă la care se poate afla punctul C, față de focarul F_2, în stânga acestuia, realizată pentru $\varepsilon \to 0$.
$$\Delta_{\text{max,stânga}}=611{,}09\ \text{km}.$$

Să analizăm acum situația reprezentată în figura alăturată, când Luna se află pe orbita eliptică, într-un moment când unghiul δ este mare şi punctul C se află la dreapta focarului F_2.



În aceste condiții, pentru intervalul $\Delta=d_{CF_2}$, rezultă:
$$\Delta=d_{F_1F_2}-d_{CF_1}=2ae-r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$
$$\Delta=2ae-\frac{p}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}=2ae-\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$
$$\frac{\Delta}{a}=2e-\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};\ \varphi=\theta-\delta;$$
$$\frac{\Delta}{a}=2e-\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\delta)}{\sin\delta};$$
$$\frac{\Delta}{a}=2e-\frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\left(\sin\theta\cot\delta-\cos\theta\right);$$
$$\delta=\varepsilon-e\sin\varepsilon;$$
$$\cot\delta=\cot(\varepsilon-e\sin\varepsilon);$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1 - e\cos\varepsilon}; \;\; \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\sqrt{1-e^2};$$

$$1 + e\cos\theta = \frac{1-e^2}{1-e\cos\varepsilon};$$

$$\frac{\Delta}{a} = e - \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\cot\delta + \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} = e - \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) + \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} = -\left[-e + \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - \cos\varepsilon\right];$$

$$\frac{\Delta}{a} \approx -\frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3;$$

$$\frac{\Delta}{a} \approx -\left[\frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3\right];$$

$$\varepsilon = \pi; \;\; e = 0{,}0549;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\right)0{,}000165469;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 - \frac{1}{2}0{,}000165469 = 0{,}001424271;$$

$$a = 384.400 \text{ km};$$

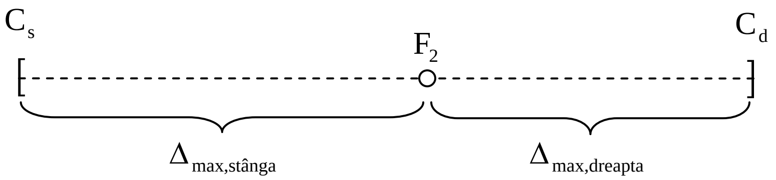
$$\Delta = 547{,}48 \text{ km},$$

reprezentând distanța maximă la care se poate afla punctul C, față de focarul F_2, în dreapta acestuia, realizată pentru $\varepsilon \to \pi$;

$$\Delta_{\text{max,dreapta}} = 547{,}48 \text{ km};$$

$$\Delta_{\text{max,dreapta}} < \Delta_{\text{max,stânga}},$$

ceea ce dovedeşte asimetria celor două intervale, față de focarul F_2, aşa cum ilustrează figura alăturată.



b) Dacă direcția axei de referință din planul secțiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei în focarul F_2 al acesteia, înseamnează că:

$$\frac{\Delta}{a} \approx \frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3 = 0,$$

din care rezultă:

$$4e\cos^2\varepsilon + 3\cos\varepsilon - e = 0;$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16e^2}}{8e};$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-3 \pm 3{,}008}{0{,}4392};$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-3+3{,}008}{0{,}4392} = 0{,}018214;$$

$$\varepsilon \approx 89^0;$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1 - e\cos\varepsilon};$$

$$\cos\theta \approx -0{,}036722721;$$

$$\theta \approx 92{,}15^0.$$

© Soluție propusă de:
Prof. dr. Mihail Sandu – Călimăneşti