

CLASA a X-a; PROBLEMA 1; REZOLVARE

a) Utilizând desenul din figura 1, rezultă:

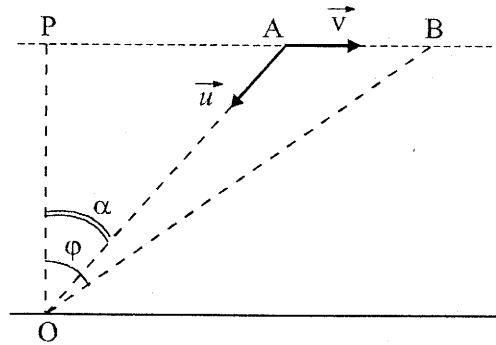


Fig. 1

$$AB = vt; AO = ut;$$

$$PA = OA \sin \alpha; PO = AO \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PA + AB}{PO} = \frac{ut \sin \alpha + vt}{ut \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{v}{u \cos \alpha};$$

$$ut \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha = u \sin \alpha + v;$$

$$ut \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = u \sin \alpha + v;$$

$$u^2 \operatorname{tg}^2 \varphi (1 - \sin^2 \alpha) = u^2 \sin^2 \alpha + 2uv \sin \alpha + v^2;$$

$$u^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin^2 \alpha + 2uv \sin \alpha - (u^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - v^2) = 0;$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \alpha + 2uv \sin \alpha - (u^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - v^2) = 0;$$

$$\sin \alpha = \frac{-uv \pm \sqrt{u^2 v^2 + \frac{u^2}{\cos^2 \varphi} (u^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - v^2)}}{\frac{u^2}{\cos^2 \varphi}};$$

$$\sin \alpha = -\frac{v}{u} \cos^2 \varphi \pm \sqrt{\frac{v^2}{u^2} \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \left(\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{v^2}{u^2} \right)} =$$

$$= -\frac{v}{u} \cos^2 \varphi \pm \cos \varphi \sqrt{\frac{v^2}{u^2} \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{v^2}{u^2}};$$

$$\sin \alpha = \cos \varphi \left[\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{v^2}{u^2} \sin^2 \varphi} - \frac{v}{u} \cos \varphi \right].$$

b)

$$OA = ut;$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \cdot AB \cos(90 + \alpha);$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 + 2OA \cdot AB \cdot \sin \alpha;$$

$$OB = t \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv \sin \alpha}.$$

c) Poziția observatorului O' fiind reprezentată în figura 2, rezultă:

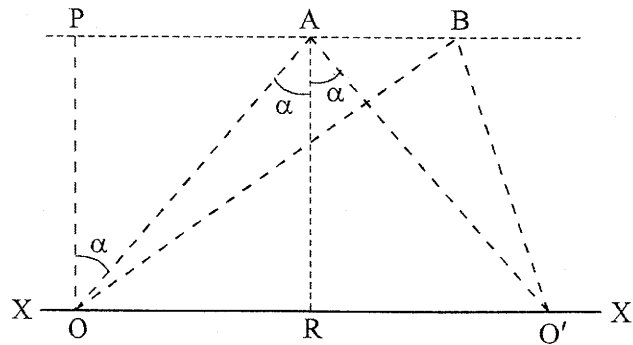


Fig. 2

$$OR = OA \sin \alpha = RO';$$

$$AO = AO' = ut;$$

$$O'B = \sqrt{O'A^2 + AB^2 - 2AO' \cdot AB \cdot \cos(90 - \alpha)};$$

$$O'B = t \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \sin \alpha}.$$

CLASA a X-a; PROBLEMA 2; REZOLVARE

a) Dacă sistemul este în stare de echilibru stabil, înseamnă că centrul de greutate al tijei se află pe orizontala centrului discului, așa cum indică figura 1, astfel încât triunghiul OCD fiind dreptunghic și ținând seama că momentul resultant al singurelor forțe externe ($m\vec{g}$ și $M\vec{g}$), în raport cu centrul discului este nul, rezultă:

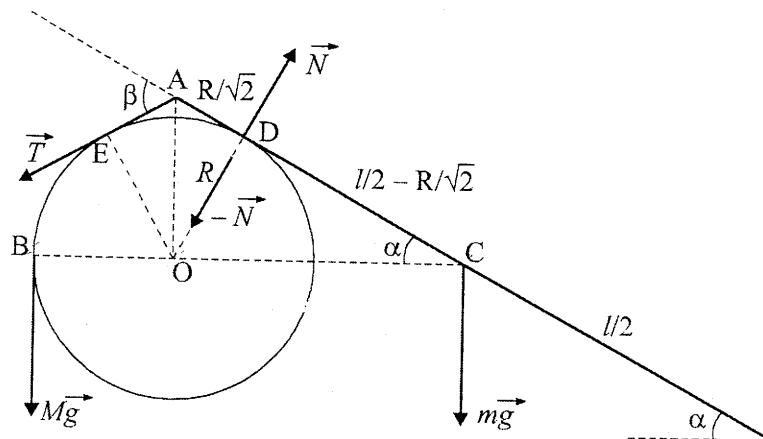


Fig. 1

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{l}{2} - \frac{R}{\sqrt{2}}};$$

$$l = 2R \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{ctg} \alpha \right);$$

$$MgR = mg \frac{R}{\sin \alpha};$$

$$\frac{m}{M} = \sin \alpha.$$

b) Scriind condițiile de echilibru (translație și rotație) pentru tijă, rezultă:

$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = 0;$$

$$T \sin \beta - N + mg \cos \alpha = 0;$$

$$T = Mg; N = g(m \cos \alpha + M \cos \beta);$$

$$T \cos \beta = mg \sin \alpha; \cos \beta = \frac{m}{M} \sin \alpha;$$

$$\cos \beta = \sin^2 \alpha; \overset{5}{EB} = R \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \right);$$

$$N = mg(\sin \alpha + \cos \alpha); \frac{N}{mg} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

c) Forțele care acționează asupra elementelor sistemului și asigură echilibrul de translație și de rotație al acestora, fiind cele reprezentate în figura 2, rezultă:

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha = N_1 \left(\frac{l}{2} + x \right);$$

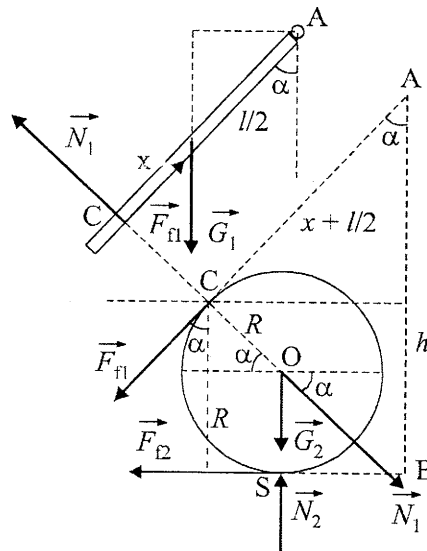


Fig. 2

$$\left(x + \frac{l}{2} \right) \cos \alpha + R(1 + \sin \alpha) = h;$$

$$x + \frac{l}{2} = \frac{h - R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha};$$

$$N_1 = \frac{mgl \sin \alpha \cos \alpha}{2[h - R(1 - \sin \alpha)]};$$

$$F_{f1} \sin \alpha + F_{f2} = N_1 \cos \alpha;$$

$$F_{f1} = F_{f2}; F_{f1} = N_1 \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$F_{f1} = \frac{mgl \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2(1 + \sin \alpha)[h - R(1 + \sin \alpha)]} = F_{f2}$$

$$F_{f1} = \mu_1 N_1; \mu_1 = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$F_{f1} \cos \alpha + Mg + N_1 \sin \alpha = N_2 = \frac{F_{f2}}{\mu_2} = \frac{F_{f1}}{\mu_2};$$

$$F_{f1} \left(\frac{1}{\mu_2} - \cos \alpha \right) = Mg + N_1 \sin \alpha;$$

$$\mu_2 = \frac{\cos \alpha}{2 \left[1 + \frac{M}{m} (1 + \sin \alpha) [h - R(1 + \sin \alpha)] \right]}.$$

CLASA a X-a; PROBLEMA 3; REZOLVARE

a) Utilizând figura 1, rezultă:

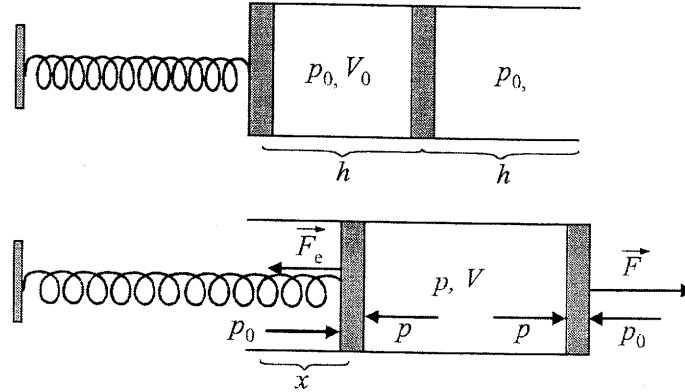


Fig. 1

$$p_0 V_0 = p V;$$

$$V = S(2h - x); V_0 = Sh;$$

$$p_0 h = p(2h - x);$$

$$p_0 S = F_e + pS; pS + F = p_0 S;$$

$$F = F_e = kx;$$

$$p = p_0 - \frac{kx}{S};$$

$$p_0 h = \left(p_0 - \frac{kx}{S}\right) (2h - x);$$

$$kx^2 - (p_0 S + 2kh)x + p_0 hS = 0;$$

$$x = \frac{p_0 S + 2kh \pm \sqrt{p_0^2 S^2 + 4k^2 h^2}}{2k};$$

$$F = kx = \frac{p_0 S}{2} + kh - \sqrt{\frac{p_0^2 S^2}{4} + k^2 h^2};$$

$$x = \frac{p_0 S + 2kh \pm \sqrt{(p_0 S + 2kh)^2 - 4kp_0 hS}}{2k}.$$

b) Utilizând figura 2, rezultă:

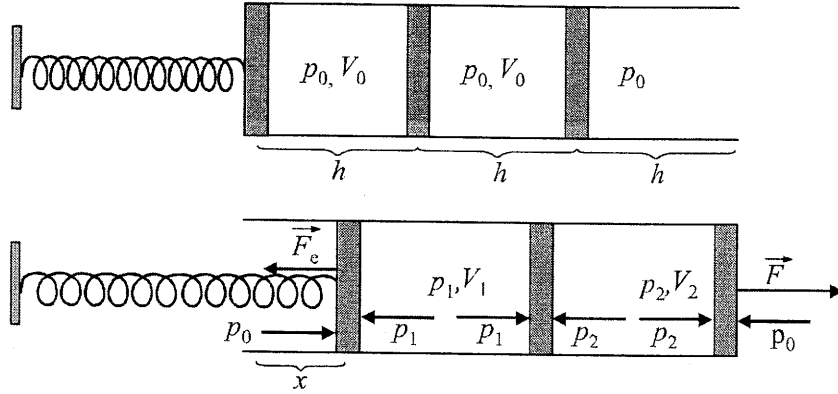


Fig. 2

$$p_0 V_0 = p_1 V_1;$$

$$p_0 V_0 = p_2 V_2;$$

$$p_1 = p_2;$$

$$V_1 = V_2;$$

$$p_0 h = p_1 \frac{3h-x}{2};$$

$$F_e + p_1 S = p_0 S; p_2 S + F = p_0 S;$$

$$F_e = (p_0 - p_1) S = kx; F = (p_0 - p_2) S;$$

$$F = F_e = kx;$$

$$p_1 = p_0 - \frac{kx}{S};$$

$$p_0 h = (p_0 - \frac{kx}{S}) \frac{3h-x}{2};$$

$$kx^2 - (p_0 S + 3kh)x + p_0 h S = 0;$$

$$x = \frac{p_0 S + 3kh \pm \sqrt{(p_0 S + 3kh)^2 - 4kp_0 h S}}{2k}.$$

$$F = kx = \frac{p_0 S + 3kh - \sqrt{(p_0 S + 3kh)^2 - 4kp_0 h S}}{2}.$$

c) Utilizând figura 3, rezultă:

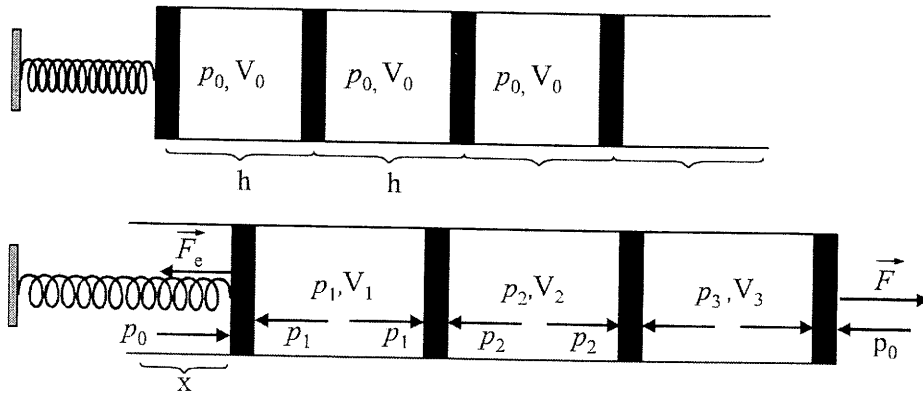


Fig. 3

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_3 V_3;$$

$$p_1 = p_2 = p_3; V_1 = V_2 = V_3;$$

$$p_0 h = p_1 \frac{4h - x}{3};$$

$$F_e + p_1 S = p_0 S; p_3 S + F = p_0 S;$$

$$F = F_e = kx; p_1 = p_0 - \frac{kx}{S};$$

$$p_0 h = (p_0 - \frac{kx}{S}) \frac{4h - x}{3};$$

$$kx^2 - (p_0 S + 4kh)x + p_0 h S = 0;$$

$$x = \frac{p_0 S + 4kh \pm \sqrt{(p_0 S + 4kh)^2 - 4kp_0 h S}}{2k};$$

$$F = kx = \frac{p_0 S + 4kh - \sqrt{(p_0 S + 4kh)^2 - 4kp_0 h S}}{2}.$$

Generalizare:

$$F = \frac{p_0 S + nkh - \sqrt{(p_0 S + nkh)^2 - 4kp_0 h S}}{2}.$$