

# CLASA a XII-a; PROBLEMA 1; REZOLVARE

a) Viteza pistonului deblocat va fi maximă, atunci când presiunea gazului din recipient va fi egală cu presiunea exterioară.

Admițând că starea inițială este aceea reprezentată în desenul *a* din figura 1, ca urmare a destinderii izoterme, rezultă:

$$pV = p_{\text{atm}} V'; \quad p = p_{\text{atm}} + \frac{F}{S};$$

$$l' = l \left( 1 + \frac{F}{Sp_{\text{atm}}} \right);$$

$$\Delta E_{\text{c, piston}} = L_{\text{rezultanta forșelor}};$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = \nu RT \ln \frac{V'}{V} - p_{\text{atm}} S (l' - l);$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = pV \ln \left( 1 + \frac{F}{Sp_{\text{atm}}} \right) - Fl;$$

$$pV = \left( p_{\text{atm}} + \frac{F}{S} \right) Sl = l(F + p_{\text{atm}} S);$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2l}{M} \left[ (F + p_{\text{atm}} S) \ln \left( 1 + \frac{F}{p_{\text{atm}} S} \right) - F \right]}.$$

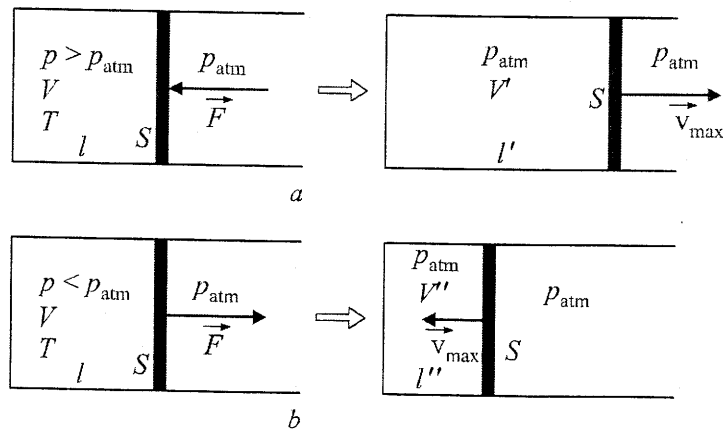


Fig. 1

Admițând că starea inițială este aceea reprezentată în desenul *b* din figura 1, ca urmare a comprimării izoterme, rezultă:

$$pV = p_{\text{atm}} V''; \quad p = p_{\text{atm}} - \frac{F}{S};$$

$$l'' = l \left( 1 - \frac{F}{Sp_{\text{atm}}} \right);$$

$$\Delta E_c = L_{\text{rezultanta forșelor}};$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = p_{\text{atm}} S(l - l'') + \nu RT \ln \frac{V''}{V};$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = Fl - pV \ln \frac{1}{1 - \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}};$$

$$pV = \left( p_{\text{atm}} - \frac{F}{S} \right) Sl = l(p_{\text{atm}} S - F);$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2l}{M} \left[ F - (p_{\text{atm}} S - F) \ln \frac{1}{1 - \frac{F}{p_{\text{atm}} S}} \right]}.$$

b) Admițând acum că din starea inițială, reprezentată în desenul *a*, destinderea este adiabatică, rezultă:

$$pV' = p_{\text{atm}} V'; \quad p = p_{\text{atm}} + \frac{F}{S};$$

$$l' = l \left( 1 + \frac{F}{Sp_{\text{atm}}} \right)^{1/\gamma};$$

$$\Delta E_c = L_{\text{rez. forșelor}};$$

$$\Delta E_c = L_{\text{destindere adiabatică}} - p_{\text{atm}} S(l' - l);$$

$$\Delta E_c = \frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = -\Delta U - p_{\text{atm}} S(l' - l);$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = -\nu C_v (T' - T) - p_{\text{atm}} S(l' - l);$$

$$T' < T;$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = \nu C_v (T - T') - p_{\text{atm}} S(l' - l);$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1};$$

$$pV = \nu RT; \quad p_{\text{atm}} V' = \nu RT';$$

$$T - T' = \frac{pV - p_{\text{atm}}V'}{\nu R} =$$

$$= \frac{\left(p_{\text{atm}} + \frac{F}{S}\right)Sl - p_{\text{atm}}Sl\left(1 + \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}\right)^{1/\gamma}}{\nu R};$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Sl}{M}} \sqrt{p_{\text{atm}} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[ p_{\text{atm}} + \frac{F}{S} - \gamma p_{\text{atm}} \left(1 + \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}\right)^{1/\gamma} \right]}.$$

Admițând acum că din starea inițială reprezentată în desenul *b*, comprimarea este adiabatică, rezultă:

$$pV'^{\gamma} = p_{\text{atm}} V''^{\gamma}; \quad p = p_{\text{atm}} - \frac{F}{S};$$

$$l'' = l \left(1 - \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}\right)^{1/\gamma};$$

$$p_{\text{atm}} S(l - l'') = \frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} + \nu C_v(T'' - T);$$

$$\frac{Mv_{\text{max}}^2}{2} = p_{\text{atm}} S(l - l'') - \nu C_v(T'' - T);$$

$$T'' - T = \frac{p_{\text{atm}} V'' - pV}{\nu R} =$$

$$= \frac{p_{\text{atm}} Sl \left(1 - \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}\right)^{1/\gamma} - \left(p_{\text{atm}} - \frac{F}{S}\right)Sl}{\nu R};$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Sl}{M}} \sqrt{p_{\text{atm}} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[ p_{\text{atm}} - \frac{F}{S} - \gamma p_{\text{atm}} \left(1 - \frac{F}{Sp_{\text{atm}}}\right)^{1/\gamma} \right]}.$$

$$c) p = p_0 [-ab\tau^2 + (a - b)\tau + 1];$$

$$\tau = \frac{a - b}{2ab};$$

$$p_{\text{max}} = p_0 \frac{(a + b)^2}{4ab}.$$

# CLASA a XII-a; PROBLEMA 2; REZOLVARE

a) Dacă mișcarea sferei este apreciată ca fiind o mișcare circulară neuniformă, în momentul trecerii ei prin poziția inferioară (desenul a, fig. 1) avem:

$$v_{\max} = \omega_{\max} L.$$

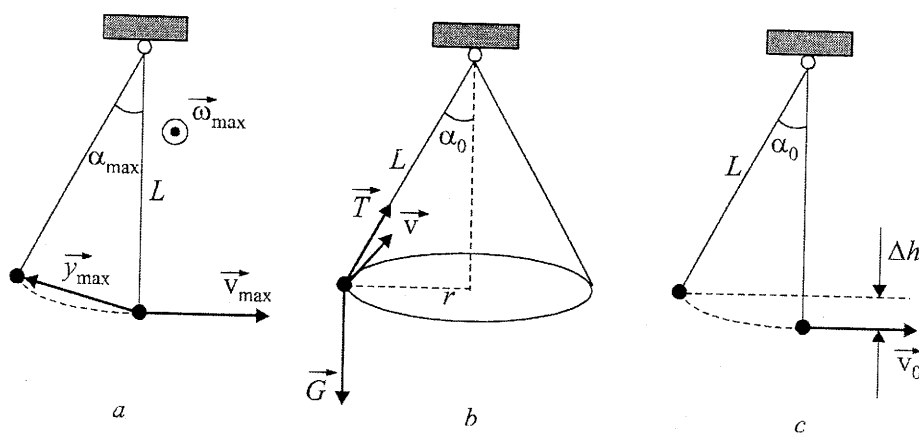


Fig. 1

Dacă mișcarea sferei este apreciată ca fiind o mișcare oscilatorie armonică, avem:

$$y = y_{\max} \sin \omega t,$$

unde  $\omega$  este pulsația oscilațiilor armonice:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad y_{\max} \approx \alpha_{\max} L;$$

$$v = v_{\max} \cos \omega t;$$

$$v_{\max} = \omega A = \omega y_{\max}.$$

În aceste condiții, din relațiile anterioare, rezultă:

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} \alpha_{\max},$$

reprezentând relația dintre mărimile caracteristice mișcării unui pendul fizic, atunci când acesta efectuează oscilații armonice mici.

b) În desenul b din figura 1 este reprezentat un pendul conic, cu lungimea  $L$  și cu deschiderea semiunghiulară  $\alpha_0$  foarte mică.

Mișcarea sferei suspendată de fir (tijă) fiind circulară uniformă, înseamnă că:

$$\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp};$$

$$T \sin \alpha_0 = \frac{mv^2}{r} \approx T \alpha_0;$$

$$T \cos \alpha_0 = mg \approx T;$$

$$r = L \sin \alpha_0 \approx L \alpha_0;$$

$$v^2 = gL\alpha_0^2.$$

În desenul c din figura 1, este reprezentat pendulul matematic inițial, eliberat din poziția externă laterală cu deviația unghiulară  $\alpha_0$  foarte mică, astfel încât, atunci când trece prin poziția de echilibru să avem:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL(1 - \cos \alpha_0);$$

$$1 - \cos \alpha_0 = 2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0^2}{2};$$

$$v_0^2 = gL\alpha_0^2 = v^2.$$

**Concluzie:** intervenția asupra pendulului matematic, într-una din pozițiile sale laterale extreme, imprimându-i acolo viteza  $\bar{v}_0$ , perpendiculară pe planul oscilațiilor și egală cu aceea din timpul oscilațiilor, corespunzătoare poziției de echilibru, transformă pendulul matematic într-un pendul conic.

Sfera pendulului conic revine în poziția inițială, după timpul:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi v_0}{g\alpha_0}.$$

c)

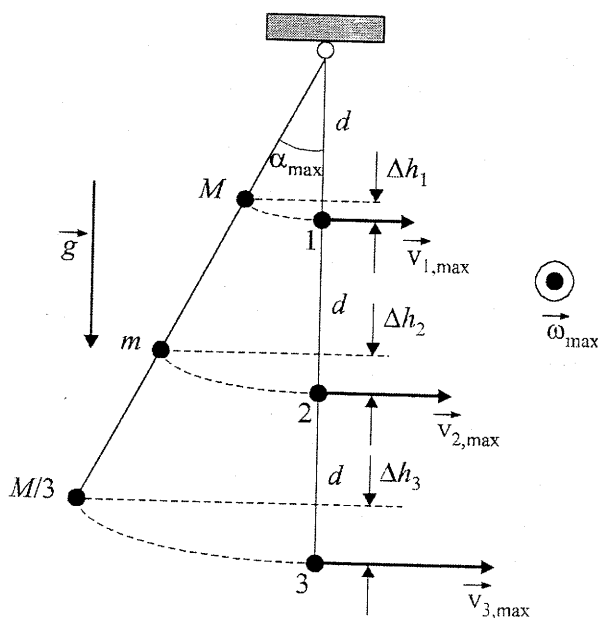


Fig. 2

În acord cu teorema conservării energiei mecanice, corespunzător celor două stări ale pendulului fizic dat, reprezentate în figura 2:

$$\frac{M}{3}g\Delta h_3 + mg\Delta h_2 + Mg\Delta h_1 = \frac{\frac{M}{3}v_{3,\max}^2}{2} + \frac{mv_{2,\max}^2}{2} + \frac{Mv_{1,\max}^2}{2};$$

$$\frac{M}{3}g3d(1 - \cos\alpha_{\max}) + mg2d(1 - \cos\alpha_{\max}) +$$

$$+ Mg d(1 - \cos\alpha_{\max}) = \frac{M}{6}(\omega_{\max} 3d)^2 +$$

$$+ \frac{m}{2}(\omega_{\max} 2d)^2 + \frac{M}{2}(\omega_{\max} d)^2;$$

$$1 - \cos\alpha_{\max} = 2\sin^2 \frac{\alpha_{\max}}{2} \approx \frac{\alpha_{\max}^2}{2};$$

$$(M + m)gd\alpha_{\max}^2 = 2(M + m)d^2\omega_{\max}^2;$$

$$\omega_{\max}^2 = \frac{g}{2d}\alpha_{\max}^2;$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{2d}}\alpha_{\max},$$

unde  $\omega_{\max}$  este viteza unghiulară maximă în mișcarea de rotație a sistemului, ca urmare a eliberării acestuia dintr-o poziție careia îi corespunde o deviație unghiulară foarte mică,  $\alpha_{\max}$ .

**Concluzie:** relația dintre  $\omega_{\max}$  și  $\alpha_{\max}$  stabilită anterior, în condițiile precizate, dovedește că mișcarea oscilatorie a pendulului fizic dat este armonică.

Rezultă:

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T}\alpha_{\max};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g}},$$

relație independentă de masele punctelor materiale ale pendulului fizic.

Pendulul fizic dat este echivalent cu un pendul matematic având lungimea  $2d$ .

## CLASA a XII-a; PROBLEMA 3; REZOLVARE

a) Pentru o poziție oarecare a lentilei față de sursă (la distanța  $p$  față de sursă), așa cum indică figura 1, diametrul spotului luminos de pe ecranul E este  $h$ , în condițiile în care diametrul spotului luminos prin lentilă este  $H$ . În absența ecranului E imaginea punctiformă a sursei S s-ar forma în punctul  $S'$ , la distanța  $x$  față de poziția ecranului, la distanța  $p'$  față de lentilă.

Din formula lentilelor și din asemănarea triunghiurilor formate, rezultă:

$$p' = \frac{pf}{p-f};$$

$$\frac{h}{H} = \frac{x}{p'} = \frac{p+p'-D}{p'} = \frac{p'-(D-p)}{p'};$$

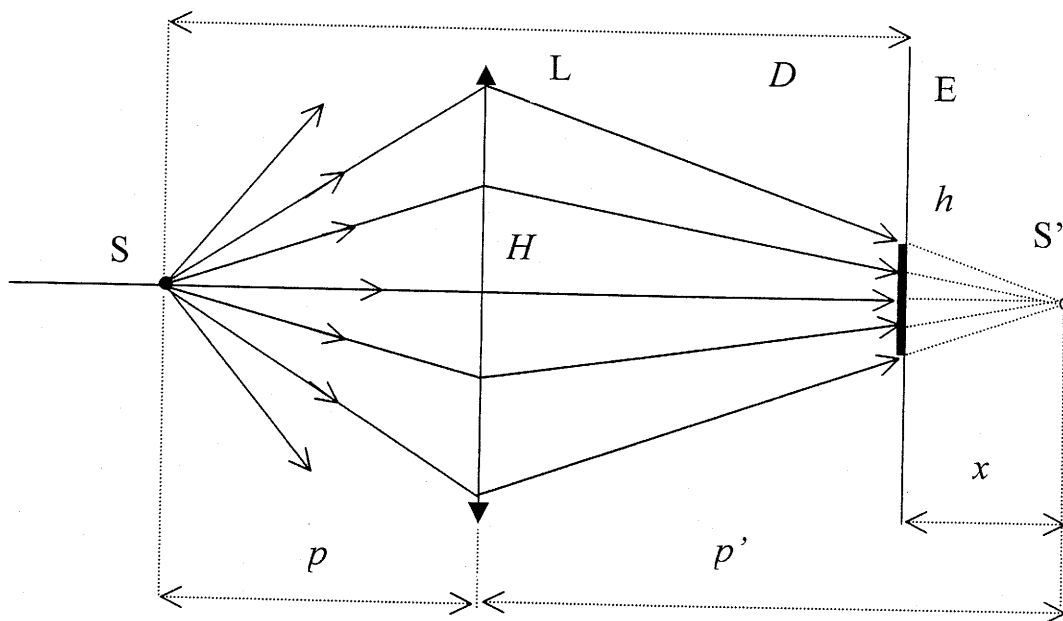


Fig. 1

$$h = H \frac{p'-(D-p)}{p'} = H \frac{\frac{pf}{p-f} - (D-p)}{\frac{pf}{p-f}} = H \left[ 1 - \frac{(D-p)(p-f)}{pf} \right];$$

$$h = H \left( \frac{D}{p} + \frac{p}{f} - \frac{D}{f} \right) = H \left[ \left( \sqrt{\frac{D}{p}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{p}{f}} \right)^2 - \frac{D}{f} \right];$$

$$h = H \left[ \left( \sqrt{\frac{D}{p}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{p}{f}} \right)^2 - 2\sqrt{\frac{D}{p}}\sqrt{\frac{p}{f}} + 2\sqrt{\frac{D}{p}}\sqrt{\frac{p}{f}} - \frac{D}{f} \right];$$

$$h = H \left[ \left( \sqrt{\frac{D}{p}} - \sqrt{\frac{p}{f}} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{D}{f}} - \frac{D}{f} \right];$$

$$\frac{dh}{dp} = 2H \left( \sqrt{\frac{D}{p}} - \sqrt{\frac{p}{f}} \right) \frac{d}{dp} \left( \sqrt{\frac{D}{p}} - \sqrt{\frac{p}{f}} \right) = 0;$$

$$\frac{H}{\sqrt{p}} \left( \sqrt{\frac{D}{p}} - \sqrt{\frac{p}{f}} \right) \left( \frac{\sqrt{D}}{p} + \frac{1}{\sqrt{f}} \right) = 0;$$

$$p \neq 0; \quad \sqrt{\frac{D}{p}} - \sqrt{\frac{p}{f}} = 0; \quad p = \sqrt{fD};$$

$$p' = \frac{pf}{p-f} = \frac{f\sqrt{fD}}{\sqrt{fD}-f};$$

$$h_{\min} = H \sqrt{\frac{D}{f}} \left( 2 - \sqrt{\frac{D}{f}} \right).$$

b) Din legea refracției rezultă că în lungul traiectoriei razei de lumină, pentru orice graniță plană corespunzătoare coordonatei de poziție  $x$ , avem:

$$n(x) \sin \theta_x = \text{constant},$$

unde  $\theta_x$  este unghiul dintre normala în punctul de incidență și raza de lumină incidentă pe planul graniță de coordonată  $x$ .

Imediat după intrarea în lama II, acolo unde indicele de refracție al mediului acesteia este din ce în ce mai mic, raza de lumină monocromatică se va refracta depărtându-se din ce în ce mai mult de normală.

Dacă înainte de planul graniță de coordonată  $x_0$ , undeva în planul graniță de coordonată  $x' < x < x_0$ , unghiul de incidență al razei de lumină depășește unghiul limită, raza de lumină se va reflecta total, fără a mai ajunge la graniță dintre lamele II și III, deci fără posibilitatea de a pătrunde și în lama III.

Dacă raza de lumină a ajuns la nivelul planului graniță de coordonată  $x_0$  și acolo unghiul de incidență este mai mic decât unghiul limită, deci acolo unde unghiul de refracție nu este încă de  $90^\circ$ , atunci raza de lumină își va continua drumul în lama II, trecând dincolo de coordonata  $x_0$ , în zona unde indicele de refracție al mediului începe să crească și se va refracta apropiindu-se permanent de normală. Ca urmare, când raza de lumină va ajunge la planul graniță dintre lamele II și III, raza de lumină va trece și în lama III.

Dacă  $\theta_0$  este unghiul de incidență al razei de lumină pe planul graniță dintre lamele I și II, pentru care unghiul de refracție la nivelul planului graniță de coordonată  $x_0$  este  $90^\circ$ , rezultă:

$$n \sin \theta_0 = n_0 \sin 90^\circ = n_0;$$



$$\sin \theta_0 = \frac{n_0}{n}; \quad \theta_0 = \arcsin \frac{n_0}{n}.$$

Concluzie: pentru unghiuri de incidență,  $\theta$ , ale razei de lumină pe fața graniță dintre lamele I și II, astfel încât  $\theta \geq \theta_0$ , raza de lumină nu pătrunde în lama III, iar pentru unghiuri de incidență  $0 \leq \theta < \theta_0$ , raza de lumină pătrunde și în lama III.

c) Din enunțul problemei rezultă că fața cubului din apropierea lentilei (AB) se află la distanța  $2f$  față de lentilă, aceasta și cu imaginea ei ( $A'B'$ ) dată de lentilă au dimensiuni identice ( $a$ ) și sunt simetrice în raport cu lentila (figura 2).

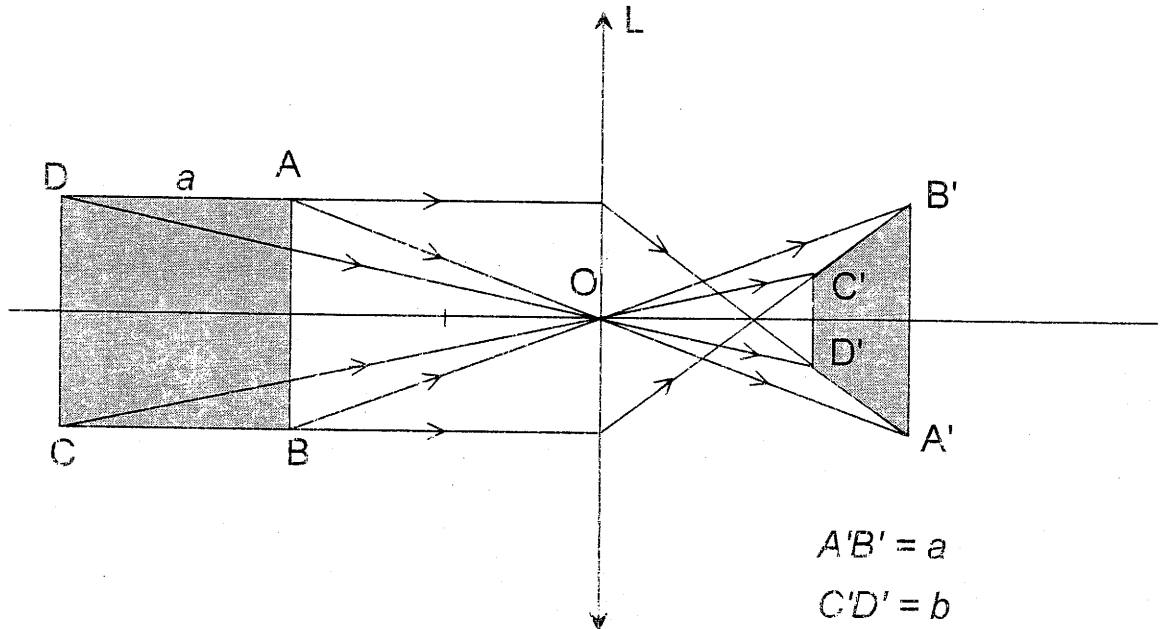


Fig. 2

Pentru fața CD, din formula lentilelor, rezultă:

$$\frac{1}{2f+a} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}; \quad p' = \frac{f(2f+a)}{f+a},$$

reprezentând distanța de la lentilă până la imaginea  $C'D'$ , pentru a cărei dimensiune ( $b$ ), din geometria figurii rezultă:

$$\frac{b/2}{a/2} = \frac{p'}{f+a}; \quad b = \frac{af}{f+a}.$$

În aceste condiții imaginea cubului este un trunchi de piramidă, a cărei axă de simetrie coincide cu axul optic principal al lentilei, a cărei bază mare este un pătrat cu lungimea laturii  $a$  și a cărei bază mică este un pătrat cu lungimea laturii  $b$ . Acest trunchi de piramidă rezultă din piramida mare cu înălțimea  $H = f$ , din al cărei vârf se îndepărtează o piramidă mică cu înălțimea:

$$h = p' - f = \frac{f^2}{f+a}.$$

Volumul imaginii (volumul trunchiului de piramidă) este:

$$V = \frac{a^2 f}{3} - \frac{a^2 f^2}{(f+a)^2} \frac{1}{3} \frac{f^2}{f+a};$$

$$V = \frac{a^3(f+a)f}{3a(f+a)} - \frac{a^3 f^2 f^2}{(f+a)^2 3a(f+a)};$$

$$V = \frac{a^3}{3} \frac{f}{f+a} \left[ \frac{f+a}{a} - \frac{f^3}{a(f+a)^2} \right];$$

$$V = \frac{a^3}{3} \frac{f}{f+a} \left[ 1 + \frac{f}{a} - \frac{f^3}{a(f+a)^2} \right];$$

$$1 + \frac{f}{a} - \frac{f^3}{a(f+a)^2} = 1 + \frac{f}{a} \left[ 1 - \frac{f^2}{(f+a)^2} \right] = 1 + \frac{f}{a} \frac{a(f+a+f)}{(f+a)^2} =$$

$$= 1 + f \left[ \frac{f+a}{(f+a)^2} + \frac{f}{(f+a)^2} \right] = 1 + \frac{f}{f+a} + \frac{f^2}{(f+a)^2};$$

$$V = \frac{a^3}{3} \frac{f}{f+a} \left[ 1 + \frac{f}{f+a} + \frac{f^2}{(f+a)^2} \right].$$