

# REZOLVARI – EVRIKA 2007

## Clasa a X-a – Problema 1

a) În condițiile nealunecării inelului, în orice moment un singur punct al său este în repaus față de suport și anume punctul de tangență cu suportul (punctul  $P_0$  din figura 1).

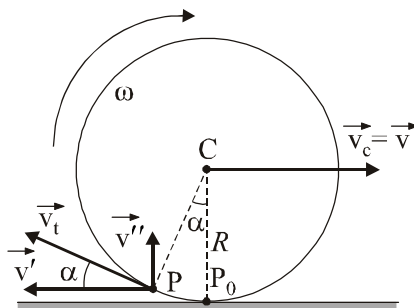


Fig. 1

După timpul  $\tau$  acest punct ajunge în poziția P, la capătul razei care formează cu verticala centrului inelului un unghi:

$$\alpha = \omega t = \frac{v}{R} \tau,$$

a cărei valoare este foarte mică, știind că  $\tau$  este foarte mic.

Viteza absolută a oricărui punct al inelului este rezultatul compunerii vectoriale a vitezei absolute a centrului inelului din mișcarea de translație a inelului ( $\vec{v}_c$ ), cu viteza liniară (tangențială) a aceluiași punct din mișcarea de rotație în jurul centrului ( $\vec{v}_t$ ):

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_t.$$

Absența alunecării în punctul inferior al inelului, face ca modulele celor două viteze care se compun să fie egale, adică:

$$v_c = v_t; \quad v = v_t = \omega R.$$

În cazul pe care îl analizăm, când unghiul  $\alpha$  este foarte mic, rezultă:

$$\vec{v}_p = \vec{v} + \vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}' + \vec{v}'';$$

$$\vec{v}' = v_t \cos \alpha \approx v_t = v;$$

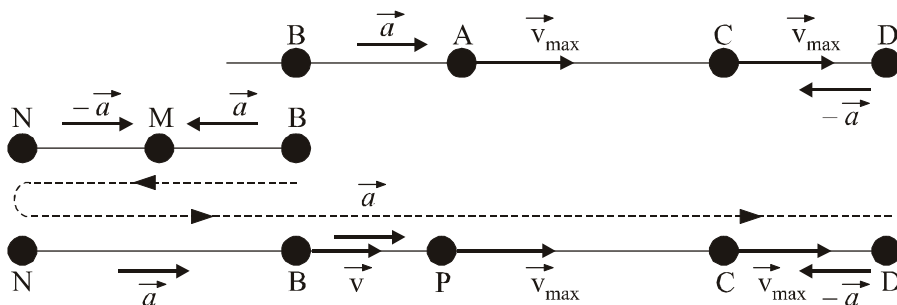
$$\vec{v}'' = v_t \sin \alpha \approx v_t \alpha = v \alpha = \frac{v^2}{R} \tau;$$

$$\vec{v} + \vec{v}' \approx 0;$$

$$\vec{v}_p \approx \vec{v}''; \quad \vec{v}_p \approx \vec{v}'' = \frac{v^2}{R} \tau,$$

adică viteza absolută a lui P, în condițiile precizate, este orientată pe verticală în sus.

b) Admițând că omul a așteptat ridicarea barierei, în varianta startului imediat, așa cum indică primul desen din figura 2, parcurgerea distanței până la depozit, în ideea realizării unui timp minim, s-a făcut în trei etape:



- mișcare rectilinie uniform accelerată fără viteză inițială, din B până în A, astfel încât viteza realizată în A să fie  $v_{\max}$ ;
- mișcare rectilinie și uniformă, cu viteza  $v_{\max}$ , din A până în C;
- mișcare rectilinie uniform încetinită până la oprire, din C până în D, astfel încât durata întregii deplasări este:

$$t_{BD} = t_{BA} + t_{AC} + t_{CD};$$

$$v_{\max} = at_{BA}; \quad t_{BA} = \frac{v_{\max}}{a} = t_{CD};$$

$$l_{BA} = \frac{at_{BA}^2}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2a} = l_{CD};$$

$$l_{AC} = v_{\max} t_{AC} = d - 2l_{BA} = d - \frac{v_{\max}^2}{a};$$

$$t_{BD} = \frac{v_{\max}}{a} + \frac{d}{v_{\max}}.$$

c) Admițând acum că omul nu a așteptat ridicarea barierei și a acceptat varianta prezentată în desenul al doilea, înseamnă că el a gândit că, din momentul ridicării barierei el va ajunge la depozit mai repede decât în prima variantă.

Ideea omului a fost aceea de a utiliza timpul  $\tau$ , cât ar fi trebuit să aștepte ridicarea barierei, pentru a se deplasa puțin înapoi și a reveni la barieră, nu în repaus, ci cu o anumită viteză (eventual cea maximă), pe care el a mizat în a-i oferi un avantaj în parcurgerea drumului de la barieră până la depozit.

Dacă  $t_0$  este durata mersului înapoi pe sectorul BN, atunci etapele întregului traseu vor fi:

- mișcare rectilinie uniform accelerată fără viteză inițială, un timp  $t_0/2$ , parcurgând distanța  $l_{BM}$ , ajungând în M cu viteza  $v_M = at_0/2$ ;
- mișcare rectilinie uniform încetinită până la oprire, un timp  $t_0/2$ , parcurgând distanța  $l_{MN} = l_{BM}$ , ajungând în N în repaus;
- mișcare rectilinie uniform accelerată fără viteză inițială, un timp  $\tau - t_0$ , revenind la barieră după parcurgerea distanței:

$$l_{NB} = \frac{a(\tau - t_0)^2}{2} = 2 \frac{at_0^2}{8};$$

$$\tau - t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{2}} = \frac{t_0}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{\sqrt{2}};$$

$$\tau - t_0 = \tau(\sqrt{2} - 1),$$

astfel încât viteza în momentul revenirii la barieră, atunci când aceasta se ridică, este:

$$v_B = a(\tau - t_0) = a\tau(\sqrt{2} - 1) < v_{\max};$$

- mișcare rectilinie uniform accelerată cu viteză inițială, până la realizarea vitezei  $v_{\max}$ , parcurgând distanța dintre punctele B și P într-un timp:

$$t_{BP} = \frac{v_{\max} - v_B}{a};$$

$$l_{BP} = \frac{v_{\max}^2 - v_B^2}{2a};$$

- mișcare rectilinie uniformă între punctele P și C, cu viteza  $v_{\max}$ , într-un timp:

$$t_{PC} = \frac{l_{PC}}{v_{\max}};$$

- mișcare rectilinie uniform încetinită până la oprire, între punctele C și D, parcurgând distanța  $l_{CD}$  în timpul  $t_{CD}$ :

$$l_{CD} = \frac{v_{\max}^2}{2a}; \quad t_{CD} = \frac{v_{\max}}{a}.$$

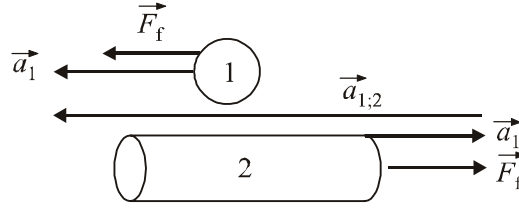
Ca urmare, în această variantă, durata deplasării de la barieră la depozit, este:

$$\begin{aligned} t'_{BD} &= t_{BP} + t_{PC} + t_{CD}; \\ t_{PC} &= \frac{l_{PC}}{v_{\max}} = \frac{d - l_{BP} - l_{CD}}{v_{\max}}; \\ t'_{BD} &= \frac{v_{\max} - v_B}{a} + \frac{d - \frac{v_{\max}^2 - v_B^2}{2a} - \frac{v_{\max}^2}{2a}}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a}; \\ t'_{BD} &= \frac{d}{v_{\max}} + \frac{2v_{\max}^2 - 2v_{\max}v_B + v_B^2}{2av_{\max}}. \end{aligned}$$

Se demonstrează ușor că  $t'_{BD} < t_{BD}$ .

### Clasa a X-a – Problema 2

a) Viteza bilei în momentul intrării în țeavă este  $v_0 \cos \alpha$ . Forțele de frecare, care acționează asupra elementelor sistemului, precum și accelerațiile acestora sunt reprezentate în figura 1.



**Fig. 1**

unde  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  sunt accelerațiile absolute, iar  $\vec{a}_{1,2}$  este accelerația relativă a bilei în raport cu țeava;

$$a_1 = \frac{F_f}{m_1}; \quad a_2 = \frac{F_f}{m_2}; \quad a_{1,2} = a_1 + a_2;$$

$$a_{1,2} = F_f \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2};$$

$$d_{1,2;\max} = \frac{l}{2} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2a_{1,2}} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \frac{m_1 m_2}{F_f (m_1 + m_2)};$$

$$F_f = \frac{m_1 m_2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{l(m_1 + m_2)}.$$

b) Mișcarea bilei în raport cu țeava este o mișcare uniform încetinită până la oprire:

$$t_0 = \frac{v_0 \cos \alpha}{a_{1,2}}; \quad a_{1,2} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{l}$$

$$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Mișcarea țevii în raport cu solul este uniform accelerată:

$$d_2 = \frac{a_2 t_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 l}{m_1 + m_2};$$

$$d_1 = d_2 + \frac{l}{2}.$$

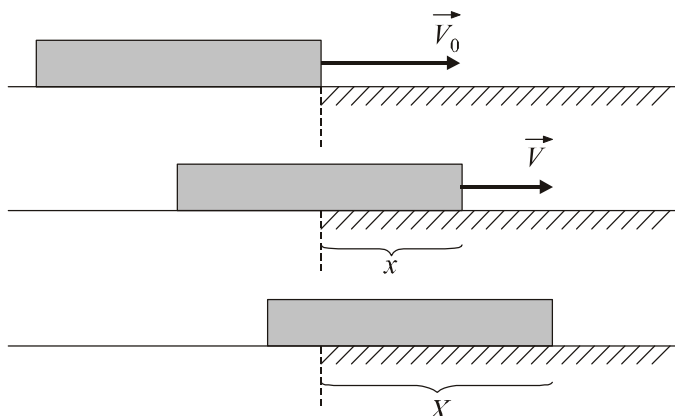
Viteza ansamblului în momentul opririi bilei este:

$$v_2 = a_2 t_0 = \frac{m_1 v_0 \cos \alpha}{m_1 + m_2} = V_0.$$

c) Forța de frecare „instantanee“, care acționează asupra țevii, atunci când aceasta a avansat în sectorul cu frecare pe distanța  $x$ , figura 2, este  $F_f = \mu N_x$ , unde  $N_x$  este reacția suportului asupra sectorului din țeavă cu lungimea  $x$ ;

$$N_x = \frac{x}{l} (m_1 + m_2)g; F_f = \frac{\mu(m_1 + m_2)g}{l} x.$$

Se observă că dependența de  $x$  a forței de frecare instantanee este liniară.



**Fig. 2**

Ca urmare, avansului țevii în sectorul cu frecare, pe distanța  $x$ , îi corespunde o forță de frecare medie:

$$F_{fm} = \frac{\mu(m_1 + m_2)gx}{2l}.$$

Rezultă:

$$\frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)V_0^2}{2} = -\frac{\mu(m_1 + m_2)gx}{2l} x;$$

$$V = \sqrt{V_0^2 - \frac{\mu gx^2}{l}}.$$

Dacă ansamblul s-a oprit după ce țeava a avansat pe distanța  $X < l$  în sectorul cu frecare, rezultă:

$$\frac{(m_1 + m_2)V_0^2}{2} = \frac{\mu(m_1 + m_2)gX}{2l} X;$$

$$X = V_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

### Clasa a X-a – Problema 3

a) Manometrul reprezentat în desenul *a* din figura 1 înregistrează diferența de presiune:

$$\Delta p = p - p_{atm} = \rho g H = p_{atm},$$

astfel încât presiunea maximă care poate fi măsurată cu acest manometru este:

$$p = 2p_{\text{atm}}.$$

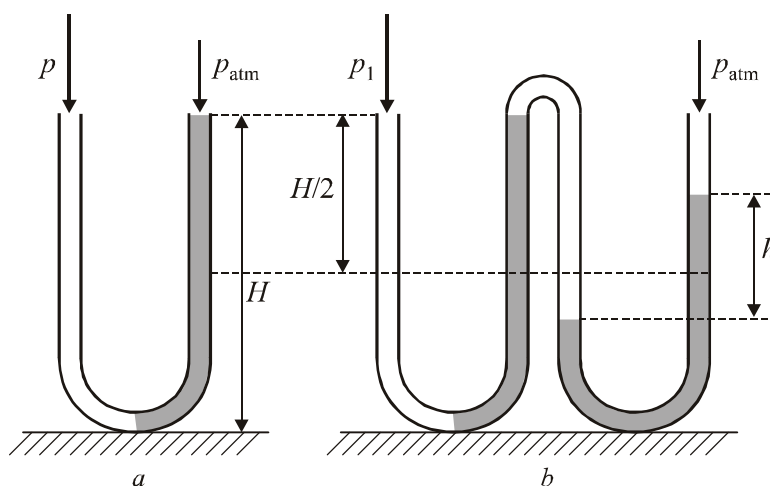


Fig. 1

Dacă se conectează cele două manometre (desenul *b*) avem:

$$p_1 = \rho g H + p_2 = p_{\text{atm}} + p_2;$$

$$p_2 = p_{\text{atm}} + \rho g h,$$

unde  $p_2$  este presiunea aerului care ocupă volumul  $S(H/2 + h/2)$ . Inițial, acest aer ocupa volumul  $SH/2$  (în coloana din dreapta primului manometru) și volumul  $SH/2$  (în coloana din stânga manometrului al doilea, având acolo presiunea  $p_{\text{atm}}$ ).

Rezultă:

$$\frac{p_2}{p_{\text{atm}}} = \frac{2SH/2}{S(H/2 + h/2)}; p_2 = 2Hp_{\text{atm}}/(H + h);$$

$$p_2 = 2p_{\text{atm}}^2/(p_{\text{atm}} + \rho g h);$$

$$p_2^2 = 2p_{\text{atm}}^2;$$

$$p_2 = \sqrt{2} p_{\text{atm}};$$

$$p_1 = (1 + \sqrt{2}) p_{\text{atm}},$$

reprezentând presiunea maximă care poate fi măsurată utilizând cele două manometre cuplate.

Diferența maximă de presiune înregistrată, este:

$$\Delta p' = p_1 - p_{\text{atm}} = \sqrt{2} p_{\text{atm}}.$$

$$H = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g}.$$

b)

$$h = \left( \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right) H.$$

c) La momentul inițial, centrul de masă (CM) al aparatului se determină ca centru de masă al unui sistem format dintr-o sferă cu densitatea  $\rho_1$  și o sferă cu densitatea  $\rho_2 - \rho_1$ , unde  $\rho_1$  - densitatea gazului care umple sfera cu raza  $R$ ,  $\rho_2$  - densitatea gazului care umple sfera cu raza  $R/2$ .

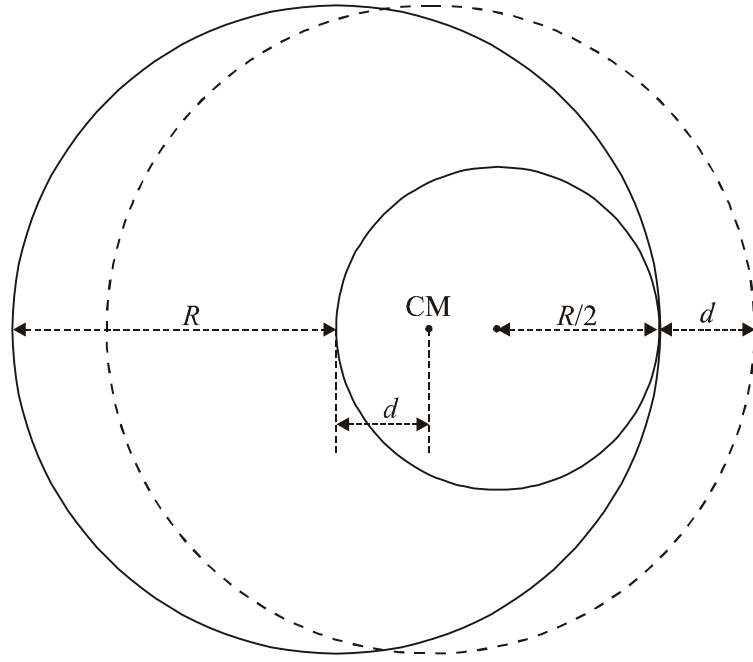
După explozie, centrul de masă al aparatului este centrul de masă al sferei cu raza  $R$ , plină cu un gaz având densitatea  $\rho$ .

Explozia din aparat nu modifică poziția centrului de masă al sistemului. Deoarece după explozie întregul aparat se deplasează pe distanța  $d$ , înseamnă că centrul de masă al aparatului se află la distanța  $d$  față de poziția inițială a centrului sferei mari, așa cum indică figura 2.

Rezultă:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R + 14d}{R - 2d}; \rho = \frac{7}{8}\rho_1 + \frac{1}{8}\rho_2;$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{R}{R - 2d}.$$



**Fig. 2**