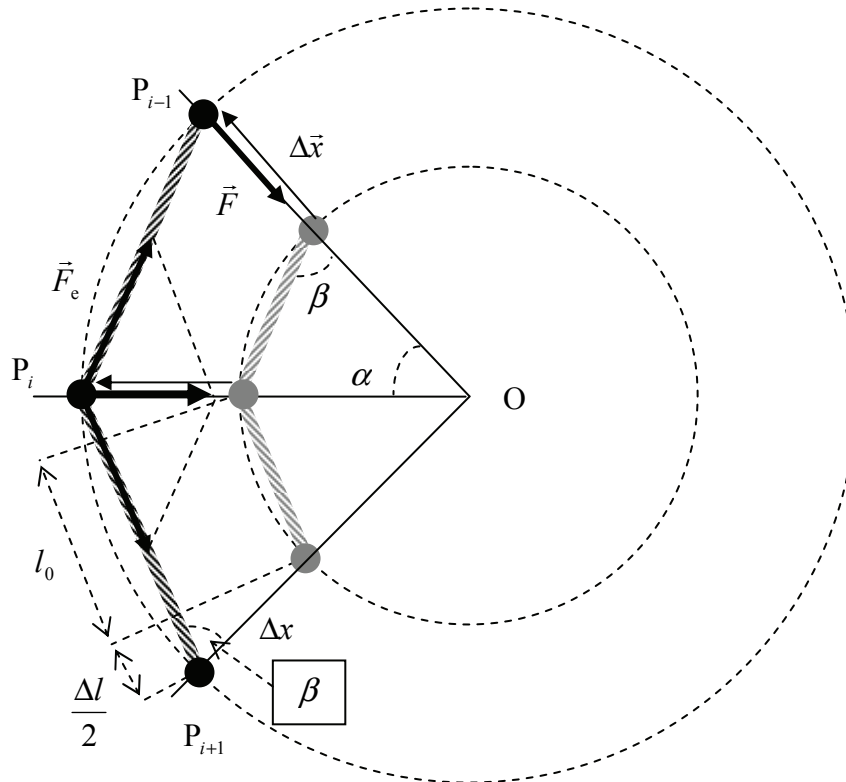




Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean – TIMIȘ
CONCURSUL NAȚIONAL DE FIZICĂ “EVRIKA!”
 Ediția a 21-a, 8 – 10 aprilie 2011, Timișoara
CLASA a XI-a

Subiectul 1 – Rezolvare

a) Utilizând figura alăturată, în care pendulele P_i , P_{i-1} și P_{i+1} sunt deplasate din poziția de echilibru, de-a lungul fiecărei spițe, vectorul elongație fiind $\Delta\vec{x}$, iar alungirea fiecărui resort fiind Δl , rezultă:



$$\alpha = \frac{2\pi}{n}; \quad \alpha + 2\beta = \pi; \quad 2\beta = \pi - \alpha;$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \cos \beta \Delta x; \quad \Delta l = 2 \cos \beta \Delta x;$$

$$F_e = k\Delta l = 2k \cos \beta \Delta x,$$

astfel încât forța care determină revenirea fiecărei bile spre poziția de echilibru este:

$$F = 2F_e \cos \beta = 4k \cos^2 \beta \Delta x;$$

$$F = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right) \Delta x;$$

$$K = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right);$$

$$F = K \Delta x; \quad \vec{F} = -K \Delta \vec{x},$$

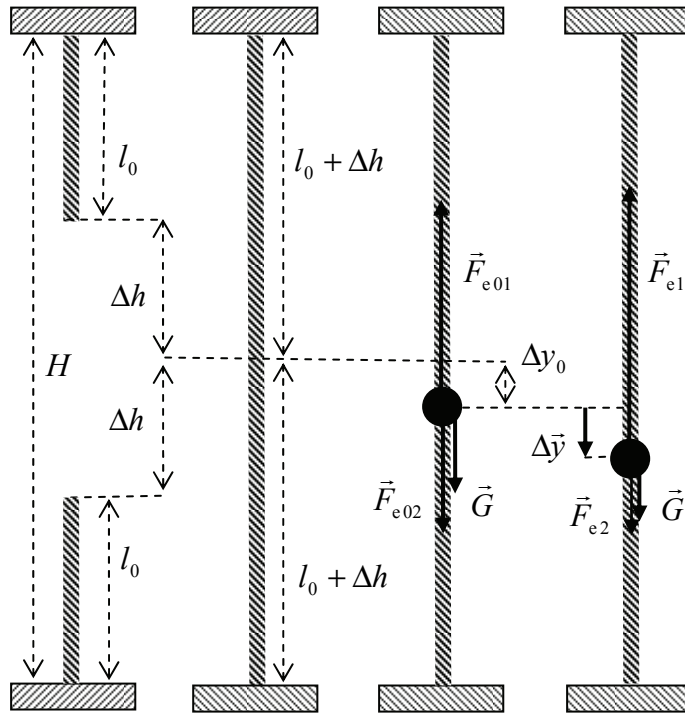
ceea ce dovedește că oscilațiile sunt armonice;

$$K = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right) = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\cos \frac{(n-2)\pi}{2n}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

b)

1) Pentru oscilațiile verticale mici ale bilei, considerând că cele două resorturi sunt permanent deformate prin întindere, utilizând secvențele din figura alăturată, rezultă:



$$2l_0 + 2\Delta h = H;$$

$$\Delta h = \frac{H - 2l_0}{2} = \frac{H}{2} - l_0;$$

$$\vec{F}_{e01} + \vec{F}_{e02} + \vec{G} = 0;$$

$$k(\Delta h + \Delta y_0) = k(\Delta h - \Delta y_0) + mg;$$

$$\Delta y_0 = \frac{mg}{2k};$$

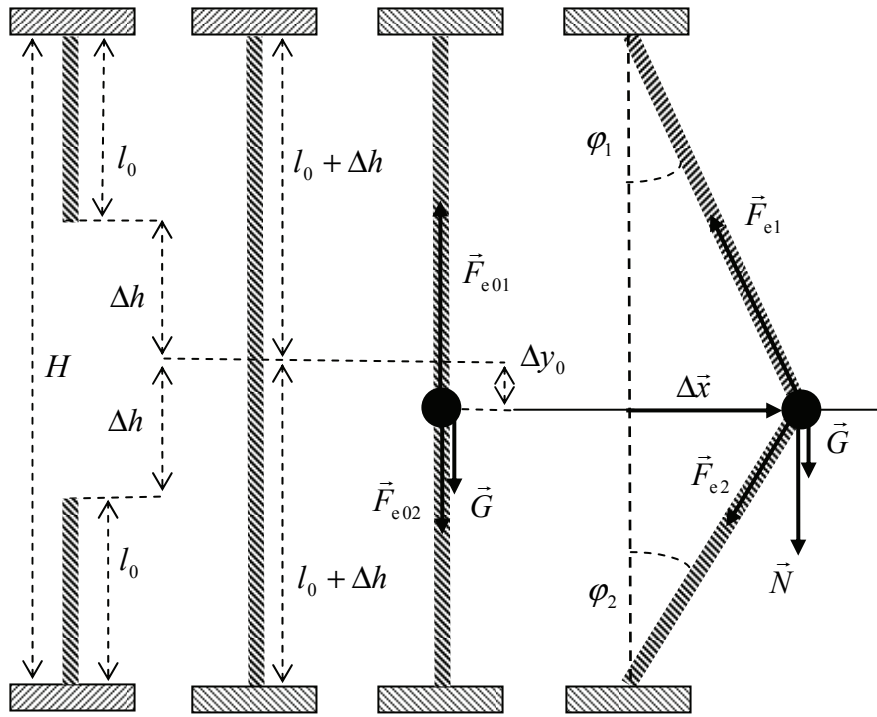
$$\vec{F} = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} + \vec{G};$$

$$\begin{aligned}
F &= F_{e1} - F_{e2} - G; \\
F &= k(\Delta h + \Delta y_0 + \Delta y) - k(\Delta h - \Delta y_0 - \Delta y) - mg; \\
F &= k(\Delta h + \Delta y_0) - k(\Delta h - \Delta y_0) - mg + 2k\Delta y; \\
F &= 2k\Delta y; \quad 2k = k_0; \quad F = k_0\Delta y; \\
\vec{F} &= -2k\Delta\vec{y}; \quad \vec{F} = -k_0\Delta\vec{y},
\end{aligned}$$

ceea ce dovedește caracterul armonic al oscilațiilor bilei;

$$k_{01} = m\omega_1^2 = m\frac{4\pi^2}{T_1^2}; \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{01}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

2) Pentru oscilațiile laterale orizontale mici, utilizând figura alăturată, rezultă:



$$\begin{aligned}
F_{e1} &\approx F_{e01} = k(\Delta h + \Delta y_0); \\
F_{e2} &\approx F_{e02} = k(\Delta h - \Delta y_0); \\
F &= F_{e1} \sin \phi_1 + F_{e2} \sin \phi_2; \\
F &\approx F_{e1} \tan \phi_1 + F_{e2} \tan \phi_2; \\
F &= k(\Delta h + \Delta y_0) \frac{\Delta x}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + k(\Delta h - \Delta y_0) \frac{\Delta x}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0}; \\
F &= k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right) \Delta x;
\end{aligned}$$

$$k_{02} = k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right);$$

$$F = k_{02} \Delta x; \vec{F} = -k_{02} \Delta \vec{x},$$

ceea ce dovedește că oscilațiile laterale mici sunt oscilații armonice;

$$k_{02} = m \omega_2^2 = m \frac{4\pi^2}{T_2^2};$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{02}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right)}};$$

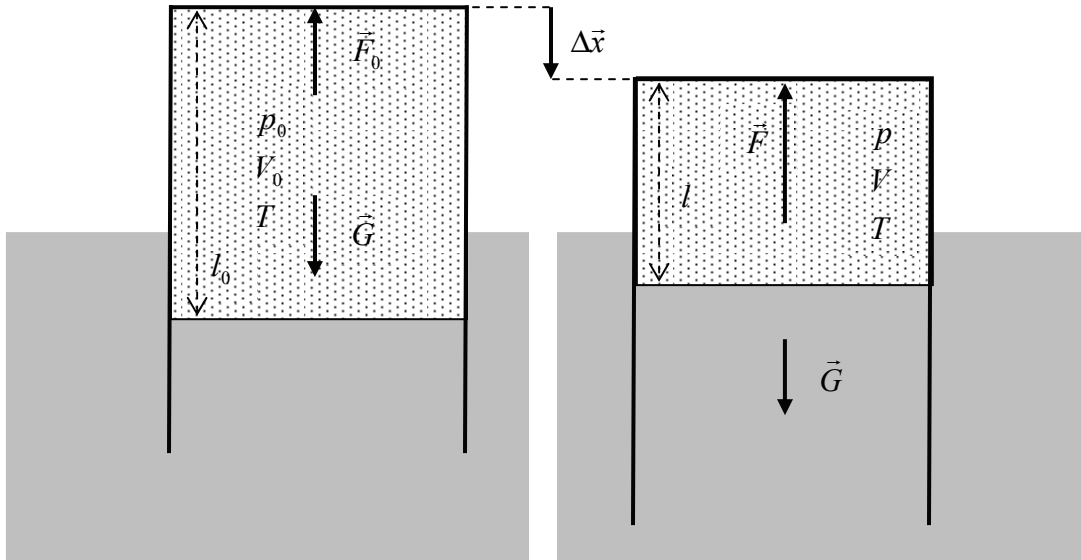
$$\Delta h = \frac{H}{2} - l_0; \Delta y_0 = \frac{mg}{2k}.$$

c) Corespunzător secvențelor din figura alăturată, rezultă:

$$F_0 = mg; p_0 S = mg; p_0 = \frac{mg}{S};$$

$$p_0 V_0 = pV; p = p_0 \frac{V_0}{V} = \frac{mg}{S} \frac{l_0}{l};$$

$$F = pS = mg \frac{l_0}{l}; l = l_0 - \Delta x;$$



$$F = mg \frac{l_0}{l_0 - \Delta x} = mg \frac{l_0}{l_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{l_0} \right)} = mg \left(1 - \frac{\Delta x}{l_0} \right)^{-1};$$

$$F \approx mg \left(1 + \frac{\Delta x}{l_0} \right); \quad \vec{R} = \vec{F} + \vec{G}; \quad R = F - G;$$

$$R = mg \left(1 + \frac{\Delta x}{l_0} \right) - mg; \quad R = \frac{mg}{l_0} \Delta x; \quad k = \frac{mg}{l_0};$$

$$R = k\Delta x; \quad \vec{R} = -k\Delta \vec{x},$$

ceea ce dovedește că oscilațiile paharului sunt oscilații armonice;

$$k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg}{l_0}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$



Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean – TIMIȘ
CONCURSUL NAȚIONAL DE FIZICĂ “EVRIKA!”
Ediția a 21-a, 8 – 10 aprilie 2011, Timișoara
CLASA a XI-a

Subiectul 2 – Rezolvare

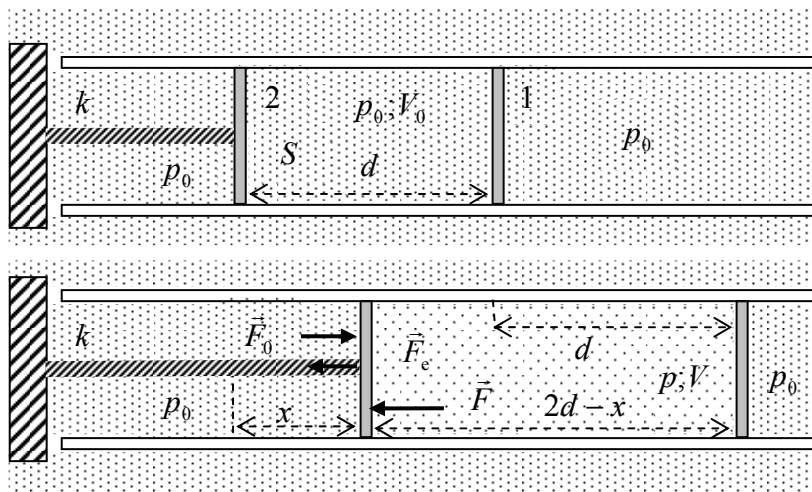
a) Dacă p_1 și respectiv p_2 sunt presiunile stabilizate ale gazului din cele două compartimente, atunci diferența lor este, în orice moment:

$$p_2 - p_1 = \frac{mg}{S}.$$

Dacă V_1 și respectiv V_2 sunt volumele celor două compartimente, într-un moment oarecare t din desfășurarea procesului, atunci, după un interval de timp Δt , când, datorită coborârii lente a pistonului, volumele celor două compartimente, cresc și respectiv scad cu cantitatea ΔV , în acord cu conservarea numărului de molecule din sistem (conservarea numărului de moli de gaz din sistem), utilizând ecuația de stare a gazelor perfecte, considerând procesul ca fiind cvasistatic, rezultă:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{p_1 V_1}{RT_1}; \quad v_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}; \\ v_1 &= \frac{p_1 (V_1 + \Delta V)}{RT_1}; \quad v_{II} = \frac{p_2 (V_2 - \Delta V)}{RT_2}; \\ v_1 + v_2 &= v_1 + v_{II}; \\ \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} &= \frac{p_1 (V_1 + \Delta V)}{T_1} + \frac{p_2 (V_2 - \Delta V)}{T_2}; \\ \frac{p_1}{T_1} &= \frac{p_2}{T_2}; \\ p_1 &= \frac{mg}{S} \frac{T_1}{T_2 - T_1}; \quad p_2 = \frac{mg}{S} \frac{T_2}{T_2 - T_1}. \end{aligned}$$

b) Deplasarea lentă a pistonului 1 pe distanța d obligă pistonul 2 să se deplaseze lent pe o distanță x , așa cum este indicat în figura alăturată, din care, pentru echilibrul pistonului 2 și pentru evoluția izotermă a aerului dintre cele două pistoane, rezultă:



$$\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_0 = 0; \quad F + F_e = F_0;$$

$$(p_0 - p)S = kx;$$

$$p_0 V_0 = pV;$$

$$p_0 d = p(2d - x);$$

$$x = \frac{(p_0 - p)S}{k};$$

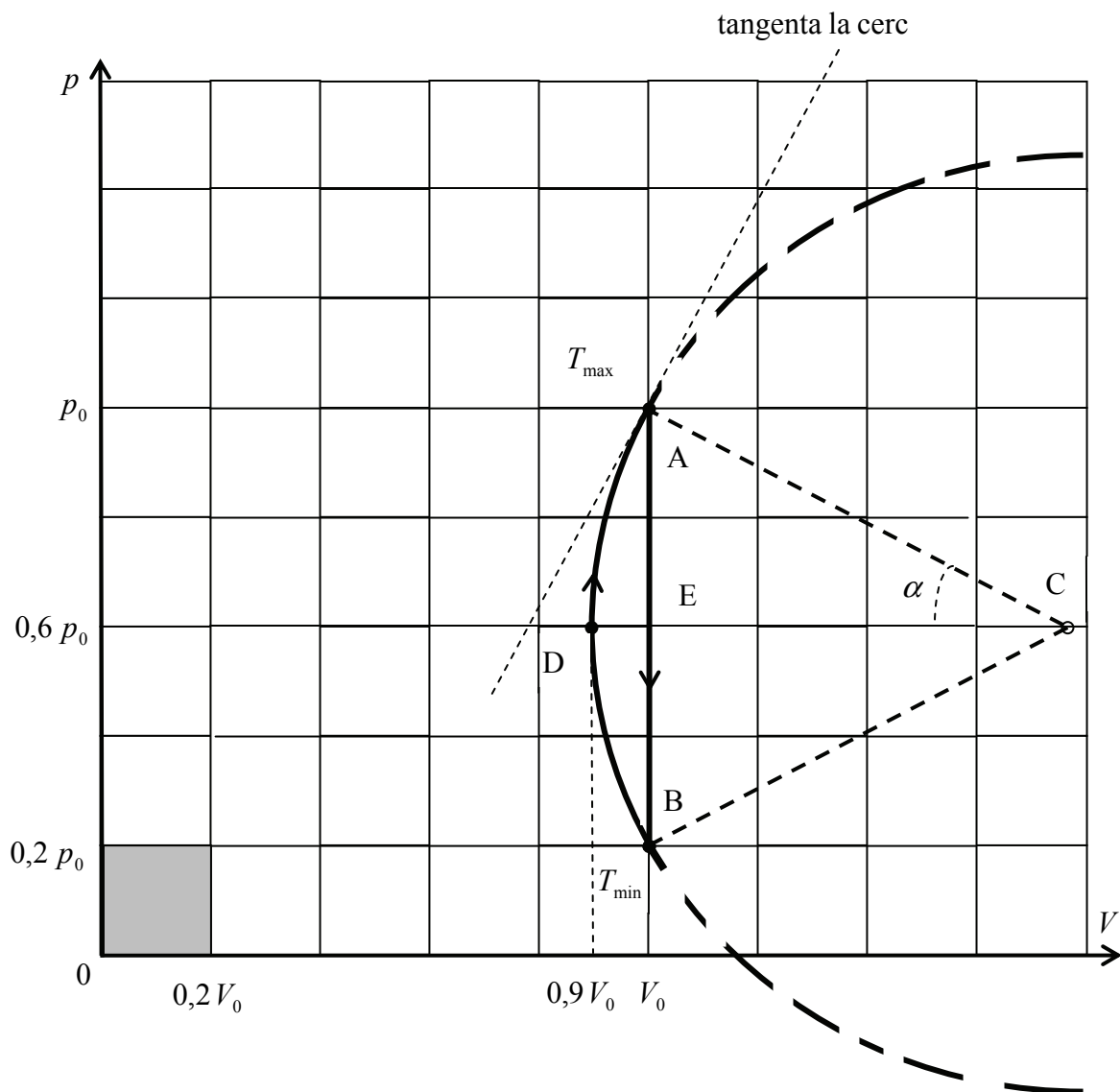
$$p_0 d = p \left(2d - \frac{(p_0 - p)S}{k} \right);$$

$$Sp^2 - (p_0 S - 2kd)p - p_0 kd = 0;$$

$$p = \frac{p_0}{2} - \frac{kd}{S} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4} + \left(\frac{kd}{S} \right)^2}.$$

c) Dacă parametrii de stare ai stării A sunt ($V_{\max} = V_0; p_{\max} = p_0; T_{\max}$), atunci semnificațiile fizice dimensionale ale laturilor oricărei celule pătrată din diagrama termodinamică dată sunt $\left(\frac{V_0}{5} = 0,2 V_0; \frac{p_0}{5} = 0,2 p_0 \right)$. Geometric însă, lungimile laturilor unei celule sunt egale. Utilizând informațiile din enunțul problemei, parametrii stării B sunt: ($V_{\max} = V_0; p_{\min} = 0,2 p_0; T_{\min}$). De asemenea, parametrii stării D sunt: ($V_{\min} = 0,9 V_0; 0,6 p_0$).

Transformarea ciclică dată fiind cea reprezentată în diagrama din figura alăturată, se stabilește, pe cale grafică, poziția centrului C al cercului din care face parte arcul BDA al transformării ciclice. Pentru aceasta se construiesc tangentele la arcul de cerc în punctele A, B și D și apoi se construiesc perpendicularele pe acestea în punctele respective. Ele trebuie să se intersecteze într-un același punct, C, care este centrul căutat al cercului din care face parte sectorul BDA al transformării ciclice.



În unități geometrice convenționale (uc), reprezentând lungimea oricărei laturi a oricărei celule pătrată din diagrama termodinamică, scriind teorema lui Pitagora pentru triunghiul dreptunghic ACE, rezultă:

$$\begin{aligned}(CE)^2 + (AE)^2 &= (AC)^2; \\ (CD - DE)^2 + (AE)^2 &= (AC)^2; \\ (r - 0,5 \text{ uc})^2 + (2 \text{ uc})^2 &= r^2; \\ r &= 4,25 \text{ uc}; \\ \sin \alpha &= \frac{(AE)}{(AC)} = \frac{2 \text{ uc}}{4,25 \text{ uc}} = 0,47; \\ \alpha &= \arcsin(0,47) \approx 0,49 \text{ rad}.\end{aligned}$$

Aria suprafeței segmentului de cerc AEBDA este egală cu aria suprafeței sectorului de cerc ACBDA, din care trebuie scăzută aria suprafeței triunghiului ABC, adică:

$$\begin{aligned}S_{\text{AEBDA}} &= S_{\text{ACBDA}} - S_{\text{ABC}} = \frac{2\alpha}{2\pi} \pi r^2 - \frac{1}{2} 4 \text{ uc}(r - 0,5 \text{ uc}); \\ S_{\text{AEBDA}} &= \alpha r^2 - 2 \text{ uc}(r - 0,5 \text{ uc});\end{aligned}$$

$$S_{\text{AEBDA}} \approx 1,35 (\text{uc})^2;$$

$$1 (\text{uc})^2 = (0,2 p_0)(0,2 V_0) = 0,04 p_0 V_0;$$

$$S_{\text{AEBDA}} = 1,35 \cdot 0,04 p_0 V_0 = 0,054 p_0 V_0,$$

ceea ce se reprezintă aria suprafeței din interiorul ciclului și pe care o identificăm cu bilanțul lucrurilor mecanice pe care sistemul termodinamic le schimbă cu exteriorul în întregul ciclu, adică:

$$L_{\text{util}} = S_{\text{AEBDA}};$$

$$L_{\text{util}} = 0,054 p_0 V_0.$$

Să analizăm acum schimburile de căldură cu exteriorul de pe cele două sectoare ale ciclului propus. Pentru transformarea izocoră, reprezentată în diagramă prin sectorul AEB:

$$Q_{\text{AEB}} = \nu C_v (T_B - T_A) = \nu C_v (T_{\min} - T_{\max}) < 0,$$

ceea ce înseamnă căldură cedată de sistemul termodinamic;

$$Q_{\text{AEB}} = Q_{\text{cedat}} < 0.$$

Pentru transformarea reprezentată în diagramă prin arcul de cerc BDA, în acord cu principiul I al termodinamicii, rezultă:

$$\Delta U_{\text{BDA}} = Q_{\text{BDA}} - L_{\text{BDA}} = \Delta U_{\text{BA}},$$

deoarece variația energiei interne a sistemului nu depinde de felul transformării;

$$Q_{\text{BDA}} = L_{\text{BDA}} + \Delta U_{\text{BA}};$$

$$L_{\text{BDA}} = L_{\text{BD}} + L_{\text{DA}},$$

unde evaluările le vom face în acord cu interpretarea fizică dată ariei suprafeței de sub graficul fiecărei transformări, respectând și convențiile algebrice pentru variantele schimbului de lucru mecanic;

$$L_{\text{BD}} < 0; L_{\text{BD}} = -\left(0,6 p_0 \cdot 0,1 V_0 - \frac{L_u}{2}\right);$$

$$L_{\text{DA}} > 0; L_{\text{DA}} = +\left(0,6 p_0 \cdot 0,1 V_0 + \frac{L_u}{2}\right);$$

$$L_{\text{BDA}} = L_u > 0,$$

având semnificația unui lucru mecanic cedat;

$$\Delta U_{\text{BA}} = \nu C_v (T_{\max} - T_{\min}) = \nu \frac{3}{2} R \left(\frac{p_0 V_0}{\nu R} - \frac{0,2 p_0 V_0}{\nu R} \right) = 1,2 p_0 V_0 > 0;$$

$$Q_{\text{BDA}} = L_u + 1,2 p_0 V_0 = 0,054 p_0 V_0 + 1,2 p_0 V_0;$$

$$Q_{\text{BDA}} = 1,254 p_0 V_0 > 0,$$

având semnificația de căldură absorbită (primită) de sistemul termodinamic;

$$Q_{\text{BDA}} = Q_{\text{absorbit}} > 0.$$

În aceste condiții randamentul termic căutat este:

$$\eta = \frac{L_{\text{util}}}{Q_{\text{absorbit}}} = \frac{0,054 p_0 V_0}{1,254 p_0 V_0} = 0,043;$$

$$\eta = 4,3 \ %.$$

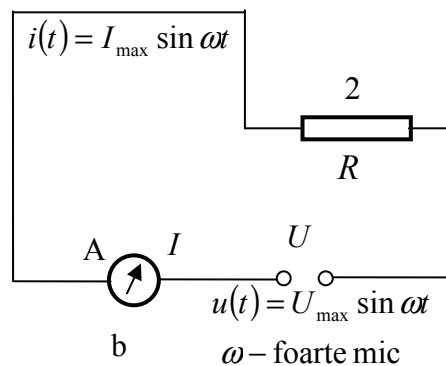
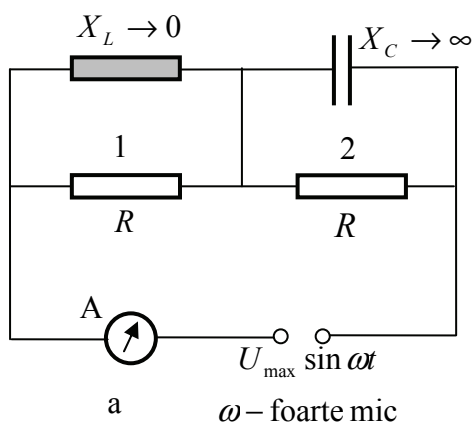


Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean – TIMIȘ
CONCURSUL NAȚIONAL DE FIZICĂ “EVRIKA!”
Ediția a 21-a, 8 – 10 aprilie 2011, Timișoara
CLASA a XI-a

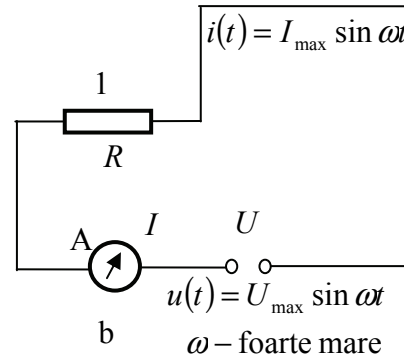
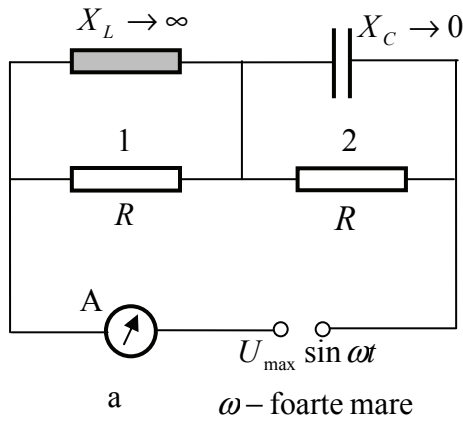
Subiectul 3 – Rezolvare

a) Pentru pulsații ω foarte mici (desenul a din figura alăturată), reactanța inductivă a bobinei ajunge considerabil de mică ($X_L \rightarrow 0$), determinând șuntarea rezistorului 1, care este conectat în paralel cu bobina, iar reactanța capacitivă a condensatorului ajunge considerabil de mare ($X_C \rightarrow \infty$). Ca urmare, intensitățile curenților prin rezistorul 1 (șuntat de bobină, $X_L \rightarrow 0$) și prin condensator ($X_C \rightarrow \infty$), sunt neglijabile față de intensitatea curentului prin rezistorul 2.

În acest caz particular, circuitul echivalent, reprezentat în desenul b din figura alăturată, conține: un rezistor cu rezistența R , un ampermetru ideal și un generator de t.e.m. alternativă, astfel încât, pentru valori foarte mici ale frecvențelor t.e.m. a generatorului, intensitatea efectivă a curentului în circuit este $I = \frac{U}{R}$, dovedind în plus că, în acest caz, mărimile $i(t)$ și $u(t)$ sunt în fază.



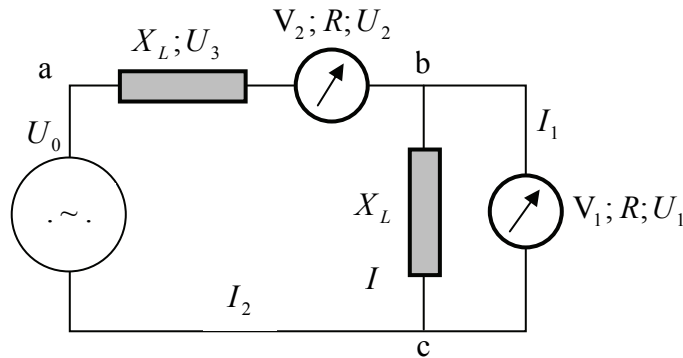
Pentru pulsații ω foarte mari (desenul a din figura alăturată), reactanța inductivă a bobinei ajunge considerabil de mare ($X_L \rightarrow \infty$), iar reactanța capacitivă a condensatorului ajunge considerabil de mică ($X_C \rightarrow 0$), determinând șuntarea rezistorului 2, care este conectat în paralel cu condensatorul. Ca urmare, intensitățile curenților prin rezistorul 2 (șuntat de condensator, $X_C \rightarrow 0$) și prin bobină ($X_L \rightarrow \infty$), sunt neglijabile față de intensitatea curentului prin rezistorul 1.



Și în acest caz particular, circuitul echivalent, reprezentat în desenul b din figura alăturată, conține: un rezistor cu rezistența R , un ampermetru ideal și un generator de t.e.m. alternativă, astfel încât intensitatea efectivă a curentului în circuit este tot $I = \frac{U}{R}$, dar obținută pentru valori foarte mari ale frecvențelor t.e.m. a generatorului, dovedind și în acest caz că mărimile $i(t)$ și $u(t)$ sunt în fază.

Concluzie: pentru valori foarte mici și pentru valori foarte mari ale frecvențelor tensiunii generatorului, circuitul echivalent al schemei date este același: un singur rezistor cu rezistența R , un ampermetru ideal și un generator de t.e.m. alternativă, astfel încât intensitatea curentului în circuit este $I = \frac{U}{R}$, indiferent de frecvența generatorului, foarte mică, sau foarte mare. Rezultă: $R = \frac{U}{I}$.

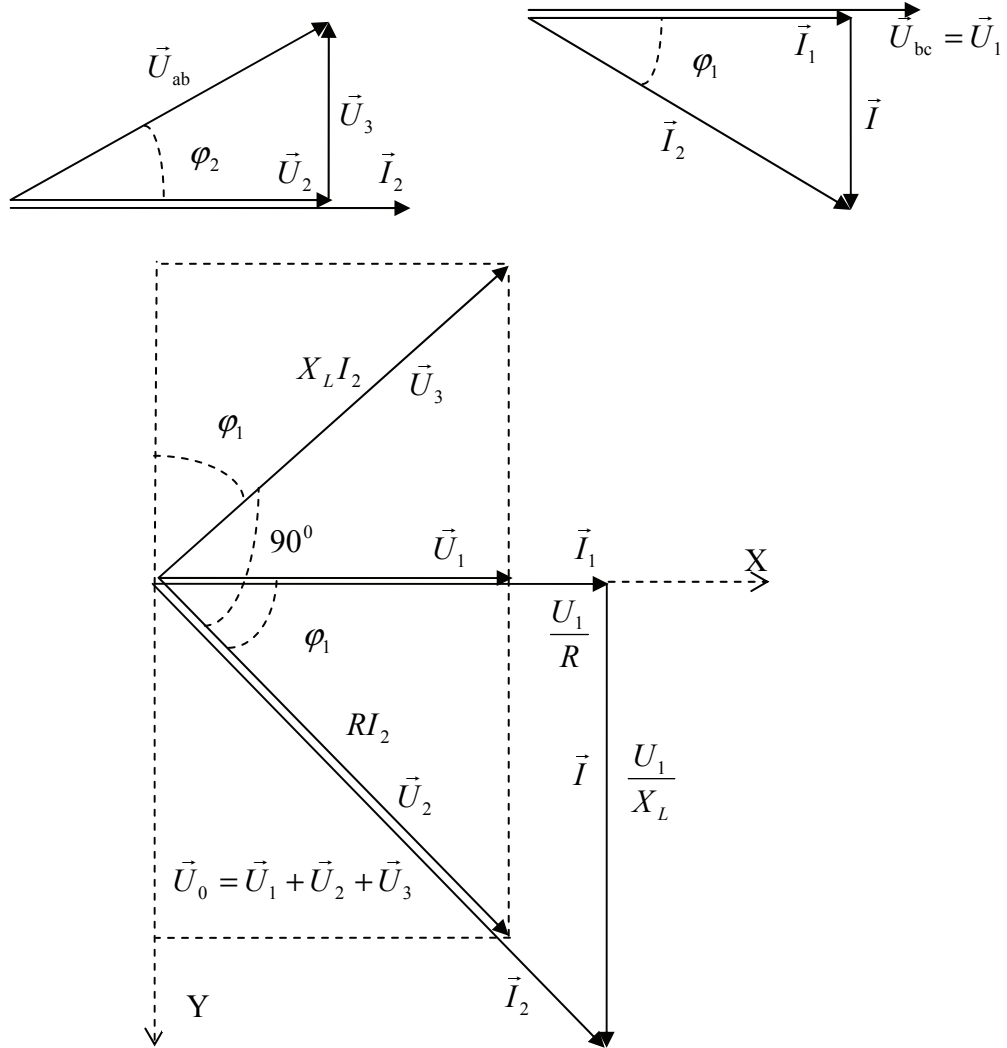
b) În figura alăturată sunt notate valorile efective ale intensităților curentilor prin laturile rețelei, precum și valorile efective ale tensiunilor la bornele dispozitivelor din rețea.



Din diagramele fazoriale reprezentate în figura alăturată, rezultă:

$$\begin{aligned}\vec{I}_2 &= \vec{I}_1 + \vec{I}; \\ I_1 &= \frac{U_1}{R}; \quad I = \frac{U_1}{X_L}; \\ I_2 &= U_1 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{U}_0 &= \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3; \\
U_2 \cos \varphi_1 &= RI_2 \cos \varphi_1 = RI_1 = U_1; \\
U_3 \sin \varphi_1 &= X_L I_2 \sin \varphi_1 = X_L I_1 = U_1; \\
U_{0X} &= 3U_1; \quad U_{0Y} = U_2 \sin \varphi_1 - U_3 \cos \varphi_1; \\
U_0^2 &= U_{0X}^2 + U_{0Y}^2; \\
U_0^2 &= (3U_1)^2 + (U_2 \sin \varphi_1 - U_3 \cos \varphi_1)^2; \\
U_0^2 &= (3U_1)^2 + \left(\frac{U_1}{\cos \varphi_1} \sin \varphi_1 - \frac{U_1}{\sin \varphi_1} \cos \varphi_1 \right)^2; \\
U_0^2 &= (3U_1)^2 + U_1^2 \left(\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} - \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \right)^2;
\end{aligned}$$



$$U_0^2 = (3U_1)^2 + U_1^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_1} \right)^2;$$

$$U_0^2 = (3U_1)^2 + U_1^2 \left(\frac{\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_1} \right)^2 (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)^2;$$

$$U_0^2 = (3U_1)^2 + U_1^2 \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\sin \varphi_1} \right)^2 (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)^2;$$

$$U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\sin \varphi_1} \right)^2 (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)^2}},$$

reprezentând indicația voltmetrului conectat în paralel cu bobina (voltmetrul V_1), a cărei valoare va fi maximă, dacă:

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\sin \varphi_1} = 0; \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1; \varphi_1 = 45^\circ;$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{\frac{U_1}{X_L}}{\frac{U_1}{R}} = \frac{R}{X_L} = 1; R = X_L; R = \omega L = 2\pi \nu L,$$

ceea ce se obține modificând frecvența t.e.m. a generatorului, până în momentul când indicația voltmetrului V_1 este maximă;

$$U_{1,\max} = \frac{U_0}{3}.$$

Corespunzător acestei situații, indicația voltmetrului conectat în serie cu generatorul (voltmetrul V_2), este:

$$U_2 = \frac{U_{1,\max}}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{3} U_0.$$

Dacă frecvența t.e.m. a generatorului scade, $\nu \rightarrow 0$, atunci reactanțele inductive ale celor două bobine devin $X_L = 2\pi \nu L \rightarrow 0$, astfel încât indicația voltmetrului V_2 va fi maximă, $U_2 = U_{2,\max} \rightarrow U_0$, iar indicația voltmetrului, corespunzătoare acestei situații va fi $U_1 \rightarrow 0$.

c) Pentru o valoare oarecare a lui R , puterea rezistorului este:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \right)^2;$$

$$P = \frac{U^2}{R + \frac{1}{\omega^2 C^2 R}},$$

a cărei valoare maximă se obține atunci când numitorul expresiei anterioare este minim, ceea ce se realizează pentru $R = \frac{1}{\omega C}$, astfel încât:

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2R} = \frac{U^2}{2} \omega C = U^2 \pi \nu C.$$

Rolul condensatorului este acela de a prelua o parte din tensiunea rețelei, fără ca el să se încălzească, atunci când ciocanul de lipit a fost calculat să funcționeze la o tensiune $U_0 < U$.