

## Concursul Vranceanu – Procopiu

### Ediția a VI-a, 4–7.12.2003

### Baraj – soluții

#### 1. Mecanică clasică și relativistă

A. (1 p din oficiu)

a) Cât timp se mișcă împreună:

$$\begin{cases} (m+M)a = F \\ ma = F_f - F \\ F_f \leq \mu mg \end{cases} \quad (3 \text{ p})$$

Rezultă:

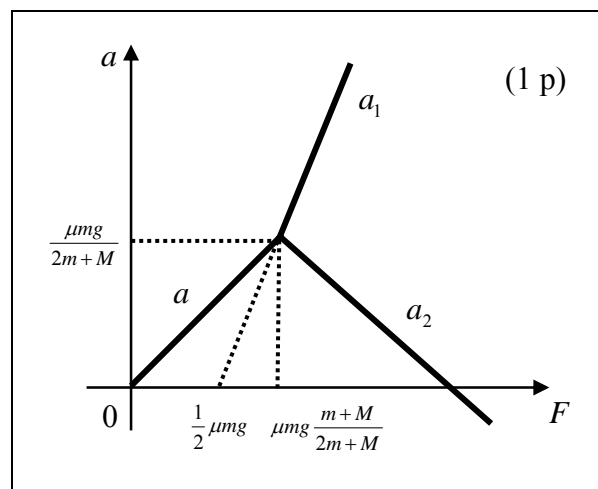
$$a = \frac{F}{m+M} \text{ pentru } F \in \left[ 0, \mu mg \frac{m+M}{2m+M} \right] \quad (2 \text{ p})$$

b) Pentru

$$F > \mu mg \frac{m+M}{2m+M}, \quad (1 \text{ p})$$

acceleerațiile sunt diferite:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2F - \mu mg}{M} \\ a_2 = \frac{\mu mg - F}{m} \end{cases} \quad (2 \text{ p})$$



B. (1 p din oficiu)

$$\text{a) } \vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}); \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; m = m_0 \gamma \quad (0,5 \text{ p})$$

$$\vec{F} = m_0 \left[ \gamma \vec{a} + \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a}) \right]; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (0,5 \text{ p})$$

Cazul  $\vec{F} \perp \vec{v}$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (0,5 \text{ p})$$

Rezultă:

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (masa transversală)} \quad (0,5 \text{ p})$$

Cazul  $\vec{F} \parallel \vec{v}$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \lambda v^2 = m_0 \gamma (\vec{v} \cdot \vec{a}) \left( 1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = m_0 \gamma^3 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \quad (1 \text{ p})$$

Rezultă:

$$\vec{F} = m_0 \gamma \vec{a} + \vec{F} \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \vec{F} = m_0 \gamma^3 \vec{a} \quad (1 \text{ p})$$

deci

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = m_0 \gamma^3 = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{masa longitudinală}) \quad (1 \text{ p})$$

b)  $\vec{F} = \text{const.}$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v) \Rightarrow \frac{F}{m_0} dt = d(\gamma v) \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{C.I.} \begin{cases} t_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$$

Integrând, rezultă:

$$\frac{F}{m_0} t = \gamma v \Rightarrow v^2 = \frac{\frac{F^2}{m_0^2} t^2}{1 + \frac{F^2}{m_0^2 c^2} t^2} \quad (1 \text{ p})$$

$v = \frac{dx}{dt}$  Prin integrare, rezultă:

$$\int_{x_0}^x dx = \frac{F}{m_0} \int_0^t \frac{t dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2 c^2} t^2}}$$

$$x - x_0 = \frac{m_0 c^2}{F} \left( \sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2 c^2} t^2} - 1 \right) \quad (1 \text{ p})$$

Ecuția traiectoriei:

$$\left( \frac{x - x_0}{\frac{m_0 c^2}{F}} + 1 \right)^2 - \frac{t^2}{\frac{m_0 c^2}{F^2}} = 1 \quad (\text{hiperbolă}) \quad (1 \text{ p})$$

## 2. Fizică moleculară, căldură și termodinamică (1 punct din oficiu)

a) Conform legii Laplace:

$$p_\sigma = \sigma \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow p_\sigma = 2\sigma \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (3 \text{ p})$$

Rezultă:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow h = 2,33 \text{ mm} \quad (1 \text{ p})$$

b) Considerând că se mișcă doar lichidul aflat în tub și aplicând teorema variației energiei cinetice între momentul realizării contactului și momentul în care lichidul ajunge la înălțimea maximă, se obține:

$$\Delta E_c = L$$

în care

$$\Delta E_c = 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$L = p_\sigma ab h_{\max} - \rho ab h_{\max} g \frac{h_{\max}}{2} \quad (3 \text{ p})$$

Rezultă:

$$h = 2 \frac{2\sigma}{\rho g} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow h = 4,67 \text{ mm} \quad (1 \text{ p})$$

### 3. Electricitate (1 p din oficiu)

Inițial:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{2\varepsilon_0 S}{h} \\ W_0 = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{\sigma^2 Sh}{4\varepsilon_0} \end{cases}$$

La distanța  $x$ :

$$\begin{cases} C = \frac{2\varepsilon_0 Sh}{h^2 - x^2} \\ W = \frac{\sigma^2 S(h^2 - x^2)}{4\varepsilon_0 h} \end{cases}$$

Conservarea energiei:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{\sigma^2 Sh}{4\varepsilon_0} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{\sigma^2 S(h^2 - x^2)}{4\varepsilon_0 h} + mgx$$

Rezultă:

$$v_x^2 = \frac{\sigma^2 Sx^2}{2m\varepsilon_0 h} - 2gx + v_0^2$$

$$\text{Pentru } x_m = \frac{2mg\varepsilon_0 h}{\sigma^2 S} \Rightarrow v_{\min}^2 = v_0^2 - \frac{2mg^2\varepsilon_0 h}{\sigma^2 S}$$

$$v_h^2 = \frac{\sigma^2 Sh}{2m\varepsilon_0} - 2gh + v_0^2$$

$$\text{Dacă } x_m > h \Leftrightarrow mg > \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \Leftrightarrow G > F_{el}$$

$$v_{0,\min} \Leftrightarrow v_h = 0$$

$$\Rightarrow v_{0,\min} = \sqrt{2gh - \frac{\sigma^2 Sh}{2\varepsilon_0 m}}$$

(1 p)

(1 p)

(1 p)

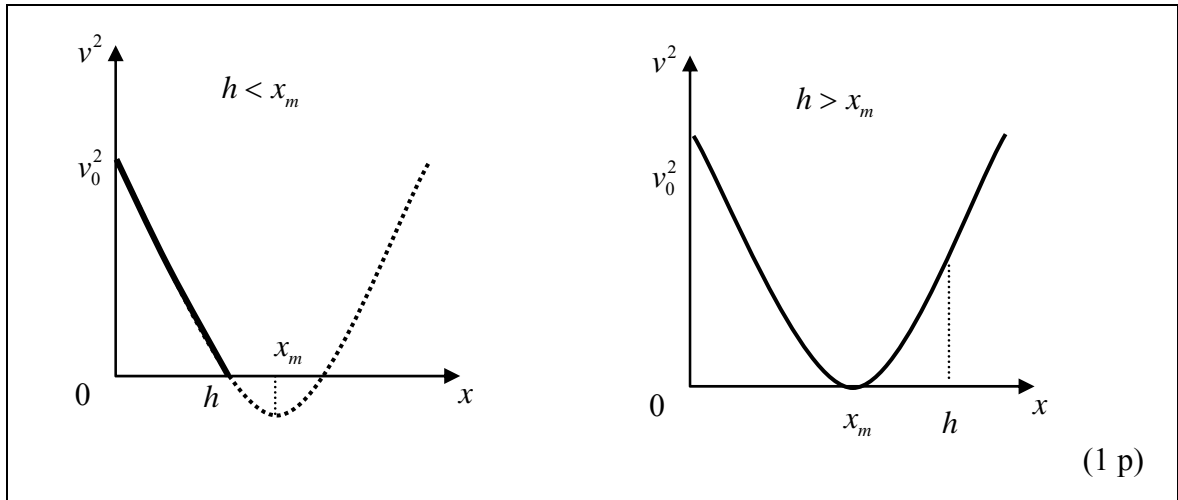
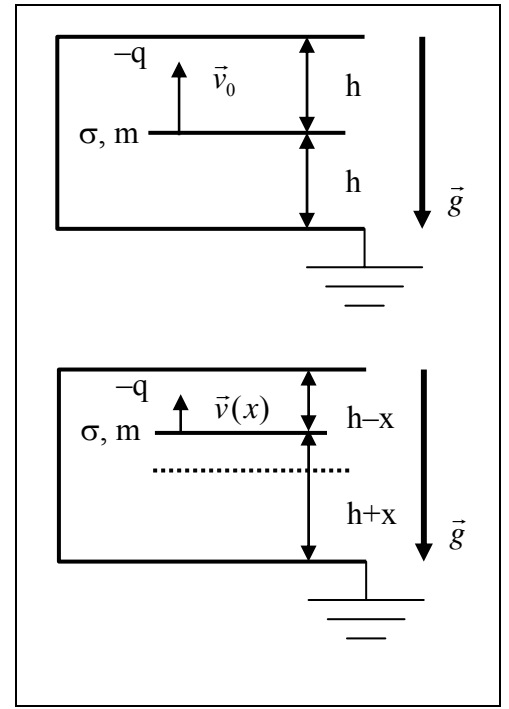
(0,5 p)

(1 p)

(0,5 p)

(0,5 p)

(0,5 p)



(1 p)

$$\text{Dacă } x_m \leq h \Leftrightarrow mg \leq \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \Leftrightarrow G \leq F_{el}$$

(0,5 p)

$$\text{Considerând } v_{\min} = 0 \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{2mg^2\varepsilon_0 h}{\sigma^2 S}$$

(0,5 p)

$$v_{0,\min} = \sqrt{\frac{2mg^2\varepsilon_0 h}{\sigma^2 S}}$$

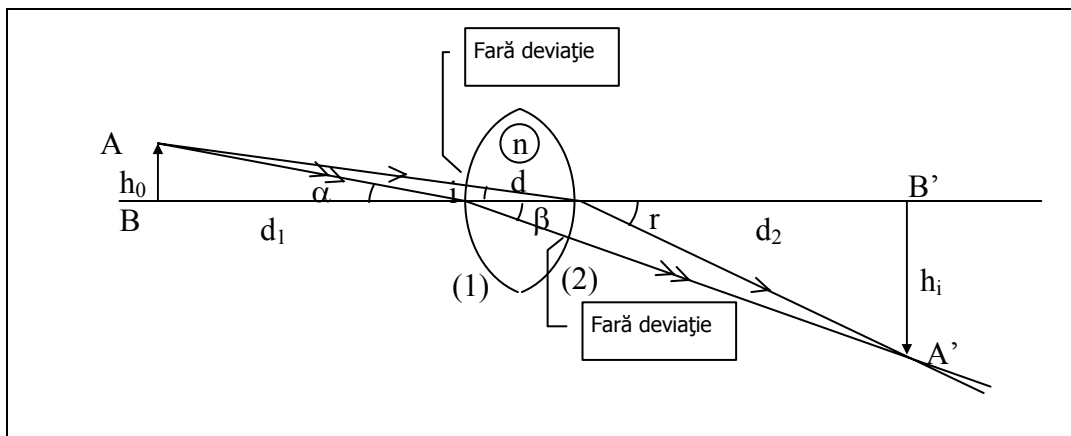
(0,5 p)

Placa trebuie să atingă viteza minimă ( $v_{\min} = 0$ ) la  $x_m$  după care va fi accelerată până la  $h$ .

#### 4. Optică (1 p din oficiu)

Grosimea axială a lentilei fiind egală cu valoarea absolută a razelor de curbură (30 cm), tragem concluzia că centrele de curbură (de pe axul optic principal) se află pe suprafețele lentilei.....1 p

Desen corect cu mersul razelor și construcția imaginilor.....3 p



Legile  $\sin \alpha = n \sin \beta$  și  $\sin r = n \sin i$  se pot scrie sub forma  $\alpha = n\beta$ ,  $r = ni$  .....1 p

Din relațiile  $h_0 \approx \alpha d_1$ ,  $h_i \approx r d_2$ ,  $h_0 \approx i(d_1 + d_2)$  și  $h_i \approx \beta(d_2 + d)$

găsim:  $d_2 = \frac{d(d_1 + d)}{(n^2 - 1)d_1 - d} = 37,5 \text{ cm}$  .....2 p

Imaginea este reală și răsturnată.....0,5 p

Mărirea transversală  $|\beta| = \frac{h_i}{h_0} = \frac{d_2 + d}{n d_1} = 0,375$  ( imaginea mai mică decât obiectul).....1 p

Observație. Când  $d_1$  ar avea valoarea  $\frac{d}{n^2 - 1} = 24 \text{ cm}$ , distanța  $d_2$  ar tinde spre infinit. Când obiectul se apropie mai mult de lentilă, ea funcționează ca lupă ( imaginea va fi virtuală). .....0,5 p