

Soluție la problema 2

Prisme (10 puncte)

1) Condiția ca radiația luminoasă cu lungimea de undă λ_0 ce traversează sistemul de prisme să nu fie refractată pe fața AC , indiferent de valoarea unghiului de incidență este ca :

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) \quad (\text{III. 1})$$

Conform enunțului, indicii de refracție ai prismelor se exprimă prin relațiile:

$$n_1(\lambda) = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} \quad (\text{III. 2})$$

$$n_2(\lambda) = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2} \quad (\text{III. 3})$$

Particularizând relațiile (III.2) și (III.3) pentru radiația cu lungimea de undă λ_0 și substituindu-le în (III.1) se obține:

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2} \quad (\text{III. 4})$$

În aceste condiții lungimea de undă λ_0 a radiației incidente are expresia:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}} \quad (\text{III. 5})$$

Înlocuind valorile numerice indicate în enunțul problemei se obține:

$$\lambda_0 = 500 \text{ nm} \quad (\text{III. 6})$$

În acest caz, pentru radiația cu lungimea de undă λ_0 , indicii de refracție a celor două prisme au valoarea

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1,5 \quad (\text{III. 7})$$

2) Pentru trei radiații de lungimi de undă diferite ($\lambda_{\text{roșu}}$, λ_0 , λ_{violet}) având același unghi de incidență pe sistem, mersul razelor prin cele două prisme este ilustrat în figura III.2.

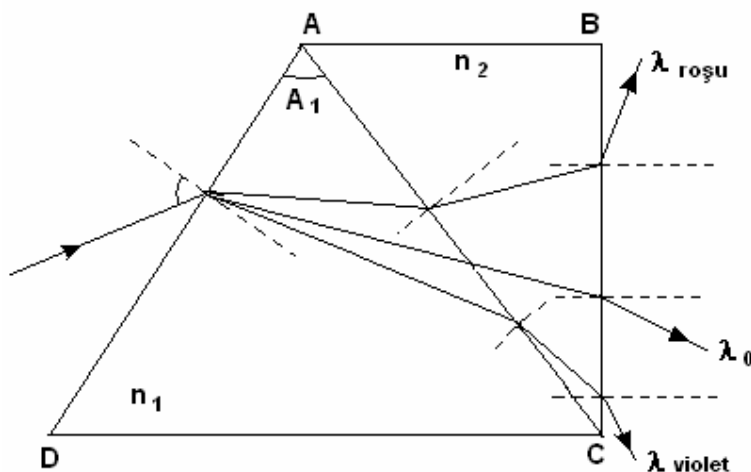


Figura III.1

Observație: Considerând $\lambda_{violet} = 400\text{ nm}$ și $\lambda_{rosu} = 700\text{ nm}$ și efectuând calculele se deduce că:

- radiația roșie cu lungimea de undă $\lambda_{rosu} = 700\text{ nm}$ nu se reflectă total pe fața BC, indiferent de valoarea unghiului de incidență;
- radiația violet cu lungimea de undă $\lambda_{violet} = 400\text{ nm}$ se poate reflecta total pe fața BC, numai dacă unghiul de incidență pe fața AD este foarte mic $i_1 < 0,4^\circ$, ceea ce nu corespunde cu desenul din enunțul problemei.

3) Figura III.2 ilustrează situația în care radiația cu lungimea de undă λ_0 traversează sistemul de prisme astfel încât unghiul de deviație dintre raza incidentă și emergentă este minim.

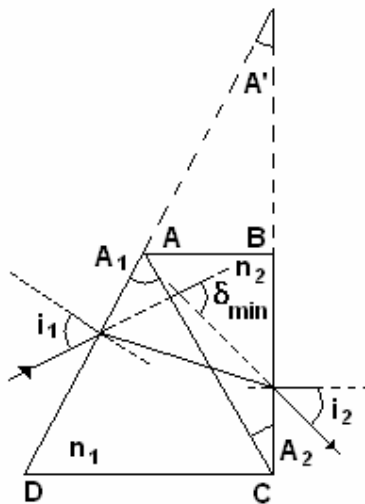


Figura III.2

În aceste condiții

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + A'}{2}}{\sin \frac{A'}{2}} \quad (\text{III. 8})$$

unde $m(\hat{A}') = 30^\circ$, conform figurii III.2

Substituind valoarea indicilor de refracție dată de relația (III.7) în relația (III.8) se obține

$$\sin \frac{\delta_{\min} + A'}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{A'}{2} \quad (\text{III. 9})$$

sau

$$\delta_{\min} = 2 \arcsin \left(\frac{3}{2} \cdot \sin \frac{A'}{2} \right) - \frac{A'}{2} \quad (\text{III. 10})$$

Efectuând calculul numeric

$$\delta_{\min} \cong 30,7^\circ \quad (\text{III. 11})$$

4) Conform notațiilor din figura III.3, legea refracției scrisă pentru fața AD are expresia

$$\sin i_1 = n_1 \cdot \sin r_1 \quad (\text{III. 12})$$

iar pentru fața AC

$$n_1 \cdot \sin r_1' = n_2 \cdot \sin r_2 \quad (\text{III. 13})$$

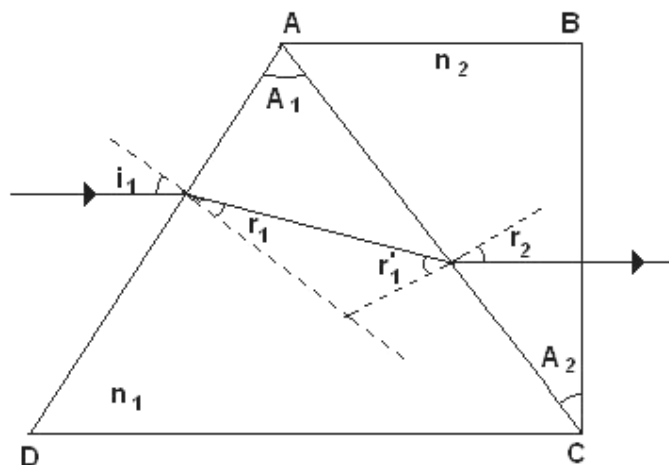


Figura III.3

Dar

$$r_1 + r_1' = A_1 \quad (\text{III. 14})$$

Din figura III.2 se deduce că

$$r_2 = A_2 \quad (\text{III. 15})$$

și că

$$i_1 = 30^\circ \quad (\text{III. 16})$$

Substituind relațiile (III.14) și (III.15) în (III.13) rezultă

$$n_1 \cdot \sin(A_1 - r_1) = n_2 \cdot \sin A_2 \quad (\text{III. 17})$$

sau

$$n_1 \cdot (\sin A_1 \cdot \cos r_1 - \sin r_1 \cdot \cos A_1) = n_2 \cdot \sin A_2 \quad (\text{III. 18})$$

Ținând cont că din relațiile (III.12) și (III.16) se obține

$$\sin r_1 = \frac{1}{2n_1} \quad (\text{III. 19})$$

și

$$\cos r_1 = \frac{1}{2n_1} \sqrt{4n_1^2 - 1} \quad (\text{III. 20})$$

Combinând relațiile (III.18), (III.19) și (III.20) și efectuând calculele se obține expresia

$$\sqrt{4n_1^2 - 1} = \frac{2n_2 \cdot \sin A_2 + \cos A_1}{\sin A_1} \quad (\text{III. 21})$$

Întrucât $\hat{A}_1 = 60^\circ$ și $\hat{A}_2 = 30^\circ$ relația (III.21) se scrie sub forma

$$\sqrt{4n_1^2 - 1} = \frac{2n_2 + 1}{\sqrt{3}} \quad (\text{III. 22})$$

sau

$$3 \cdot n_1^2 = 1 + n_2 + n_2^2 \quad (\text{III. 23})$$

Înlocuind relațiile (III.1) și (III.2) în (III.23) și efectuând calculele se obține

$$\lambda^4 \cdot (3a_1^2 - a_2^2 - a_2 - 1) + (6a_1b_1 - b_2 - 2a_2b_2) \cdot \lambda^2 + 3b_1^2 - b_2^2 = 0 \quad (\text{III. 24})$$

Rezolvând ecuația (III.24) se determină valoarea lungimii de undă λ a radiației incidente pe sistemul de prisme, după o direcție paralelă cu baza DC și care la ieșirea din sistem se propagă tot după o direcție paralelă cu baza DC .

$$\lambda = 1194 \text{ nm} \quad (\text{III. 25})$$

$$\lambda \cong 1,2 \mu\text{m} \quad (\text{III. 26})$$

Delia DAVIDESCU, SNEE București
Adrian S.DAFINEI, Universitatea București