

Soluție la Problema 1

Zgârie – nori (10 puncte)

a. Un strat subțire de azot cu grosimea h aflat la înălțimea z poate fi descris prin presiunea $p(z)$ și temperatura $T(z)$. Un paralelipiped din acest strat, caracterizat prin aria S a fețelor conținute în fețele stratului de azot și cu înălțime h are volumul $V(z)$
 $V(z) = S \cdot h(z)$

Dacă numărul moleculelor de azot din acest paralelipiped este N , ecuația de stare a gazului se scrie sub forma

$$\begin{cases} p(z) \cdot V(z) = N \cdot k \cdot T(z) \\ p(z) \cdot S \cdot h(z) = N \cdot k \cdot T(z) \end{cases} \quad (1)$$

Combinând ecuația de stare cu legea transformării adiabatice

$$p(z) \cdot V(z)^\gamma = \chi \quad (2)$$

rezultă legătura dintre presiunea și temperatura gazului sub forma

$$p^{\gamma-1} = \frac{(N \cdot k \cdot T(z))^\gamma}{\chi} \quad (3)$$

sau

$$p^{\gamma-1} = \eta \cdot T^\gamma \quad (4)$$

În relațiile de mai sus χ , η sunt constante.

Diferențiind relația (4) se obține

$$(\gamma-1)p^{\gamma-2} \cdot dp = \eta \cdot \gamma \cdot T^{\gamma-1} \cdot dT \quad (5)$$

iar împărțind membru la membru relația (5) la (4) rezultă

$$\begin{cases} (\gamma-1) \frac{dp}{p} = \gamma \cdot \frac{dT}{T} \\ \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dp}{p} \end{cases} \quad (6)$$

b. Deoarece paralelipipedul de azot considerat este în echilibru, trebuie ca greutatea sa să fie egalată de forța ascensională reprezentând rezultanta forțelor de presiune datorate acțiunii pe fețele de arie S a presiunii atmosferice. Dacă masa unei molecule de azot este m se poate scrie că

$$\begin{cases} N \cdot m \cdot g + S \cdot (p(z+h) - p(z)) = 0 \\ \frac{p \cdot V}{k \cdot T} m \cdot g + S \frac{dp}{dz} h = 0 \end{cases} \quad (7)$$

de unde

$$\begin{cases} \frac{dp}{dz} = -\frac{p \cdot m \cdot g}{T \cdot k} \\ dp = -\frac{p \cdot m \cdot g}{T \cdot k} dz \end{cases} \quad (8)$$

c. Dacă se elimină $\frac{dp}{p}$ între relațiile (6) și (8) se obține legea de variație a temperaturii cu înălțimea în forma

$$\begin{cases} dT = -\frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{m \cdot g}{k} \cdot dz \\ dT = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{m \cdot g}{k} \cdot dz \end{cases} \quad (9)$$

Prin integrarea relației de mai sus între baza și vârful clădirii aflat la înălțimea $H = 1000 \text{ m}$ se obține

$$\begin{cases} T_{\text{vârf}}(H) - T_{\text{bază}}(0) = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{m \cdot g}{k} \cdot H \\ T_{\text{vârf}}(H) = T_{\text{bază}} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{m \cdot g}{k} \cdot H \end{cases} \quad (10)$$

Folosind valorile numerice furnizate de enunț temperatura în vârful clădirii este

$$\begin{cases} T_{\text{vârf}}(1000) = 30^\circ + \left(\frac{5}{7} - 1\right) \left(\frac{4,65 \times 10^{-26} \times 9,80}{1,38 \times 10^{-23}} \cdot 1000 \right)^\circ \\ T_{\text{vârf}}(1000) = 30^\circ - 9,4^\circ \cong 20,6^\circ \end{cases} \quad (11)$$

Ultima relație indică valoarea temperaturii în vârful zgârie-norului cu înălțimea de un kilometru, dacă temperatura la baza sa este de 30°C .

Delia DAVIDESCU, SNEE București
Adrian S.DAFINEI, Universitatea București