



### Problema I

#### A. Oglinzi plane (6 puncte)

O persoană cu înălțimea  $D = 2m$  stă în picioare în fața unei oglinzi plane, plasată vertical pe un perete. Distanța pe verticală dintre creștetul capului persoanei și ochii săi este  $d = 0,2m$ . Determină:

- înălțimea minimă a oglinzii pentru ca persoana să se poată vedea în întregime în oglindă;
  - distanța dintre partea de jos a oglinzii și orizontala pantofilor persoanei., în condiția precizată la punctul a.
- Aceeași persoană se apropie de o oglindă dreptunghiulară înclinată, care se sprijină pe podea și pe perete, astfel încât unghiul diedru dintre perete și oglindă de  $\alpha = 45^\circ$ . Determină:
- distanța maximă dintre persoană și muchia diedrului oglină – podea, atunci când persoana își vede creștetul capului;
  - distanța dintre persoana care stă în picioare și muchea diedrului oglină – perete, atunci când persoana își vede pantofii.

#### Oglinzi plane – soluție

Imaginea din figura 3.1 prezintă persoana (aflată în stânga) și imaginea sa în oglindă AC

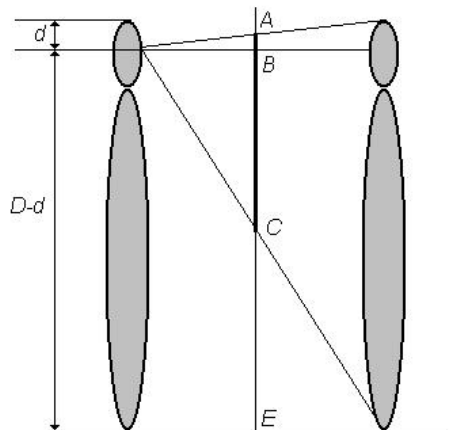


Figura 0.1

Segmentul  $AB$  determinat pe peretele cu oglinda de „linia ochilor” care unește ochii cu imaginea lor și linia care unește ochiul persoanei cu creștetul capului imaginii are lungimea

$$\begin{cases} AB = d/2 \\ AB = 0,1m \end{cases} \quad (0.1)$$

Segmentului  $BC$  determinat pe peretele cu oglinda de „linia ochilor” și linia care unește ochiul persoanei cu talpa imaginii are lungimea

$$\begin{cases} BC = CE = (D - d)/2 \\ BC = CE = 0,9m \end{cases} \quad (0.2)$$

Înălțime minimă a oglinzii este

$$AB + BC = 1m \quad (0.3)'$$

Distanța dintre marginea de jos a oglinzii și orizontala tălpilor este

$$CE = 0,9m$$

$$(0.4)^*$$

Imaginea din figura 3.2. prezintă imaginea persoanei și imaginea sa în momentul în care raza vizuală de la creștetul imaginii  $A'$  poate ajunge la ochiul persoanei  $C$ . În desen  $G$  este „urma” muchiei diedrului oglindă – pereche iar  $GB$  este orizontala tălpilor persoanei. Lungimea segmentului determinat pe oglindă de linia creștetelor care unește creștetul persoanei cu creștetul imaginii și linia de vedere care unește creștetul imaginii cu ochiul persoanei este  $EG$

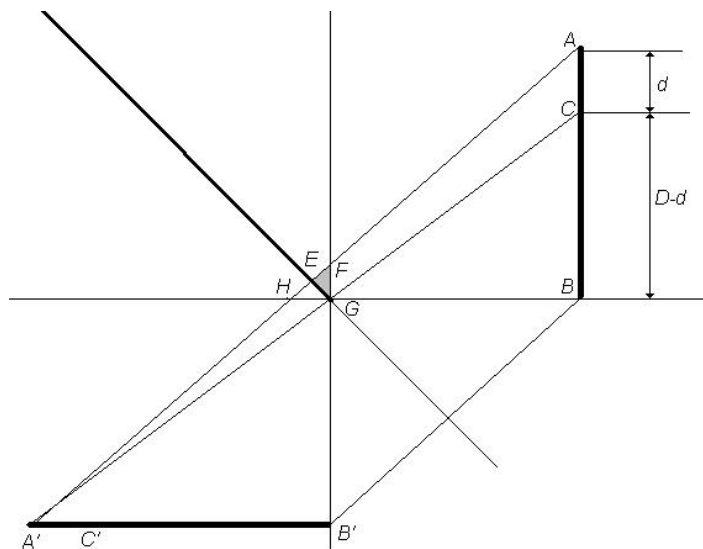


Figura 0.2

Lungimea proiecțiilor pe orizontală și verticală ale acestui segment este ( $FG$  este linie mijlocie în  $\triangle ACA'$ )

$$\begin{cases} FG = HG = d/2 \\ FG = HG = 0,1m \end{cases} \quad (0.5)$$

Deoarece triunghiul  $\triangle ABH$  este dreptunghic isoscel,

$$\begin{cases} HB = D \\ HB = 2m \end{cases} \quad (0.6)$$

În concluzie, distanța dintre picioarele persoanei și muchea unghiului diedru când persoana își vede creștetul este

$$\begin{cases} GB = HB - HG \\ GB = 1,9m \end{cases} \quad (0.7)^*$$

Raza care pleacă de la pantofii imaginii nu poate ajunge la ochiul persoanei decât dacă punctul  $B$  coincide cu  $G$ .

Distanța  $BG$  pentru cazul în care persoana își vede pantofii este

$$GB = 0 \quad (0.8)^*$$

### B. Numărul de celule din corpul uman (4 puncte)

Estimează ordinul de mărime al numărului de celule din corpul uman. Dimensiunea liniară medie a unei celule este de  $10\mu m$ .

#### Numărul de celule din corpul uman - soluție

Se poate face o estimare a volumului unui om, modelând corpul uman printr-un cilindru. Poți considera un om cu înălțimea de circa  $2m$  și cu o circumferință de circa  $1m$ . În aceste condiții raza maximă a circumferinței este de aproximativ  $\frac{1}{6}m$ , iar raza medie a circumferinței poate fi considerată de circa  $0,1m$ . Prin urmare volumul cilindrului este

$$V \approx 0,06 m^3$$

Pentru a estima volumul unei celule de dimensiuni medii din corpul uman, poți presupune că celula este de formă cubică și că latura cubului este  $\ell = 10 \mu m$ . Prin urmare volumul cubului este

$$v_{cub} \approx 10^{-15} m^3$$

În această modelare, numărul de celule din corpul uman este

$$N = \frac{V}{v_{cub}},$$

ceea ce conduce la

$$N \approx 6 \cdot 10^{13}$$

Rafinând modelul de estimare a volumului corpului uman și considerând corpul uman ca un ansamblu de cilindri se poate obține o estimare mai bună a numărului de celule.

*Soluție propusă de:*

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației  
Cercetării și Tineretului*

*Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București*



### Problema a II-a

#### Vedere din avion (10 puncte)

Un avion are ca ferestre plăci plane transparente verticale cu grosimea  $d = 4,5\text{ cm}$  construite din sticlă cu indicele de refracție  $n = \sqrt{3}$ .

Avionul staționează pe pistă.

a. Un călător din avion vede fasciculul foarte îngust (asimilabil unei raze de lumină) provenit de la un pointer laser care se propagă din exterior spre avion pe direcția perpendiculară pe fereastră. Realizează un desen în care să evidențiezi raza incidentă pe fereastra avionului și raza emergentă. Determină distanța dintre aceste două raze.

b. Călătorul vede apoi raza pointerului laser care se propagă în avion venind din exterior, într-un plan vertical perpendicular pe planul ferestrei și la un unghi  $\alpha = 60^\circ$  față de normala în punctul în care raza iese din fereastră. Realizează un desen în care să evidențiezi raza incidentă pe fereastra avionului și raza emergentă pentru situația descrisă la acest punct. Determină distanța dintre direcțiile de propagare ale acestor două raze.

c. Imaginea unui mic obiect luminos exterior avionului este observată astfel încât atât obiectul cât și imaginea sa sunt coplanare într-un plan vertical perpendicular pe fereastră. Găsește poziția imaginii față de poziția obiectului, în condițiile în care călătorul din avion privește spre imaginea după direcția perpendiculară pe placă. Folosește un sistem de coordonate  $xOy$ , conținut în planul de incidență, cu axa  $Ox$  orientată pe direcția perpendicularei de la obiect la placă și cu axa  $Oy$  conținută în planul feței de intrare a luminii în placă.

d. Un obiect cade pe verticală. Precizează dacă traiectoria observată de călător este sau nu o linie verticală și justifică răspunsul.



#### Vedere din avion - soluție

Propagarea razelor de lumină care traversează placa este prezentată în figura 3.1.

Datele geometrice de intrare ale problemei sunt

$$\begin{cases} OS = x \\ OF = d \end{cases} \quad (0.1)$$

Din legea refracției

$$\sin \alpha = n \cdot \sin \alpha' \quad (0.2)$$

Rezultă că unghiul (față de normală) sub care raza de lumină iese din placă este egal cu cel sub care intră în aceasta. Deoarece

$$\begin{cases} \frac{KC}{KB} = \cos \alpha' \\ KB = \frac{d}{\cos \alpha'} \end{cases} \quad (0.3)$$

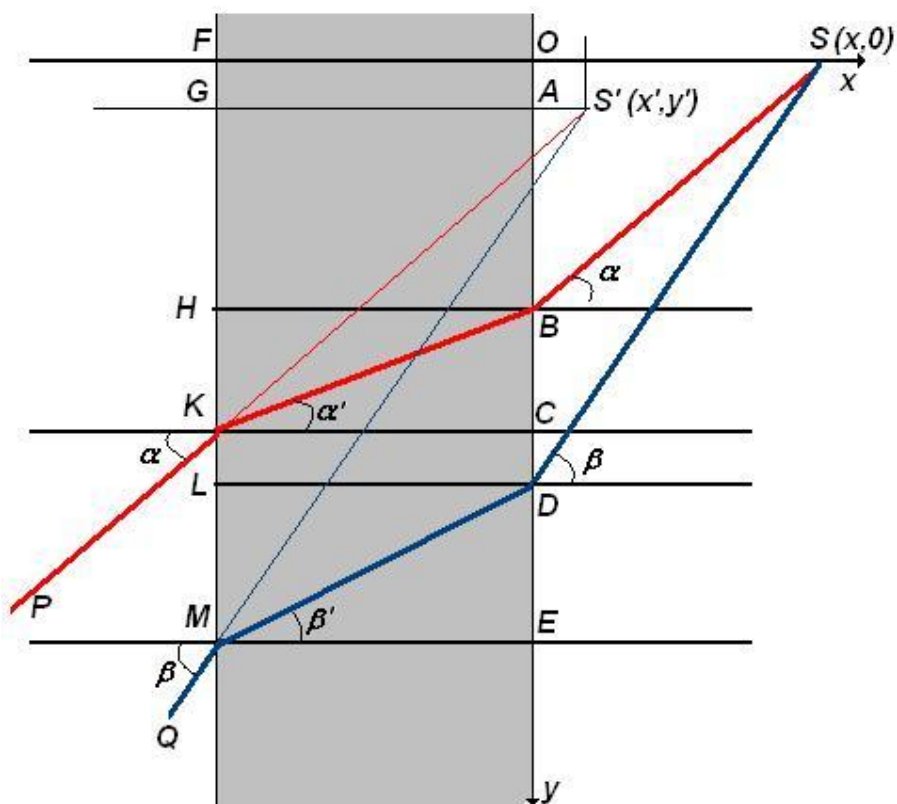


Figura 0.1

și distanța măsurată pe perpendiculara comună dintre direcția razei incidente pe placă  $SB$  și direcția razei emergente  $KP$  este

$$\begin{cases} \delta = KB \cdot \sin(\alpha - \alpha') \\ \delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha'} \end{cases} \quad (0.4)$$

În cazul incidenței normale, raza emergentă este normală pe placă și „separarea”  $\delta$  dintre raza incidentă și cea emergentă este nulă.

$$\delta(\alpha = 0) = 0 \quad (0.5)^*$$

În cazul incidenței raza este refractată în placă sub unghiul  $\alpha'$  pentru care

$$\begin{cases} \sin 60^\circ = \sqrt{3} \sin \alpha' \\ \sin \alpha' = 1/2 \\ \alpha' = 30^\circ \end{cases} \quad (0.6)$$

Raza iese din placă la unghiul  $\alpha = 60^\circ$  iar separarea razelor este – în acest caz

$$\begin{cases} \delta = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha'} \\ \delta = \frac{4,5 \cdot \sin(60^\circ - 30^\circ)}{\cos 30^\circ} \\ \delta = \frac{4,5}{\sqrt{3}} \cong 2,6 \text{ cm} \end{cases} \quad (0.7)^*$$

Pentru construcția imaginii prin placa transparentă a unui punct luminos, se urmărește drumul prin placă pentru două raze care pleacă din punctul  $S$  dar care, pentru un observator aflat dincolo de placă par să vină din punctul  $S'$ .

Astfel,

$$\begin{cases} OB = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ HK = d \cdot \operatorname{tg} \alpha' \\ OD = x \cdot \operatorname{tg} \beta \\ LM = d \cdot \operatorname{tg} \beta' \end{cases} \quad (0.8)$$

și în consecință

$$\begin{cases} FK = OB + HK = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + x \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ FM = FL + LM = x \cdot \operatorname{tg} \beta + d \cdot \operatorname{tg} \beta' \\ KM = FM - FK = x \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) + d \cdot (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \beta') \end{cases} \quad (0.9)$$

Pentru observator razele de lumină emergente  $LP$  și  $MQ$  „par să vină” din punctul  $S'(x', y')$ .

$$\begin{cases} AS' = x' \\ OA = y' \\ GS' = d + x' \end{cases} \quad (0.10)$$

și

$$\begin{cases} GK = (d + x') \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ GM = (d + x') \cdot \operatorname{tg} \beta \\ KM = (d + x') \cdot (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \end{cases} \quad (0.11)$$

De asemenea

$$\begin{cases} y' = FK - GK \\ y' = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + d \cdot \operatorname{tg} \alpha' - (d + x') \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad (0.12)$$

Cele două raze care ajung la ochiul observatorului sunt foarte apropiate astfel că se poate scrie că

$$\begin{cases} \beta = \alpha + \Delta \alpha \\ \beta' = \alpha' + \Delta \alpha' \end{cases} \quad (0.13)$$

cu  $\Delta \alpha, \Delta \alpha'$  suficient de mici pentru a admite că

$$\begin{cases} \sin \Delta \alpha \cong \Delta \alpha \\ \sin \Delta \alpha' \cong \Delta \alpha' \\ \cos \Delta \alpha = \cos \Delta \alpha' \cong 1 \end{cases} \quad (0.14)$$

Legea refracției se rescrie în aceste condiții pentru a doua rază ca

$$\begin{cases} \sin \beta = n \cdot \sin \beta' \\ \Delta \alpha \cdot \cos \alpha = n \cdot \cos \alpha' \cdot \Delta \alpha' \end{cases} \quad (0.15)$$

de unde

$$\frac{\Delta \alpha'}{\Delta \alpha} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \quad (0.16)$$

Ținând seama că

$$\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a = \frac{\sin(b - a)}{\cos a \cdot \cos b} \quad (0.17)$$

rezultă că

$$tg\beta - tg\alpha = \frac{\sin \Delta\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha)} = \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (0.18)$$

respectiv

$$tg\beta' - tg\alpha' = \frac{\Delta\alpha'}{\cos^2 \alpha'} \quad (0.19)$$

Egalând expresiile lungimii segmentului  $KM$  din (3.9) și (3.11) rezultă succesiv

$$\begin{cases} x \cdot (tg\beta - tg\alpha) + d \cdot (tg\beta' - tg\alpha') = (d + x') \cdot (tg\beta - tg\alpha) \\ x + d \frac{(tg\beta' - tg\alpha')}{(tg\beta - tg\alpha)} = d + x' \\ x + d \frac{\Delta\alpha'}{\cos^2 \alpha'} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\Delta\alpha} = d + x' \end{cases} \quad (0.20)$$

Ceea ce , ținând seama de (3.16) revine la

$$\begin{cases} x + d \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha'} \cdot \frac{1}{n} = d + x' \\ x' = x + d \left[ \frac{1}{n} \frac{\cos^3 \alpha}{\left( \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2} \right)^3} - 1 \right] \end{cases} \quad (0.21)$$

Pentru incidența normală

$$\begin{cases} x'(\alpha = 0) = x + d \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \\ x'(\alpha = 0) = x + d \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right] \cong x - 0,42d \end{cases} \quad (0.22)^*$$

iar pentru incidență la  $\alpha = 60^\circ$

$$\begin{cases} x'(60^\circ) = x + d \left[ \frac{1}{n} \frac{1/8}{\left( \sqrt{1 - 3/4n^2} \right)^3} - 1 \right] \\ x'(60^\circ) = x + d \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1/8}{\left( \sqrt{3/4} \right)^3} - 1 \right] = x - \frac{d}{9} \cong x - 0,11d \end{cases} \quad (0.23)^*$$

Ținând seama de expresia (3.12) a coordonatei verticale a poziției imaginii rezultă

$$\begin{cases} y' = (x - d - x') \cdot tg\alpha + d \cdot tg\alpha' \\ y' = d \cdot \left( tg\alpha' - \frac{1}{n} \frac{\cos^3 \alpha}{\left( \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2} \right)^3} tg\alpha \right) \end{cases} \quad (0.24)^*$$

Pentru incidența normală

$$\{y'(0) = 0$$

iar pentru incidență la  $\alpha = 60^\circ$

$$\begin{cases} y'(60^\circ) = d \cdot \left( \operatorname{tg} 30 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1/8}{3\sqrt{3}/8} \operatorname{tg} 60 \right) \\ y'(60^\circ) = d \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = d \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases} \quad (0.25)^*$$

*Soluție propusă de:*

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației  
Cercetării și Tineretului  
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București*