

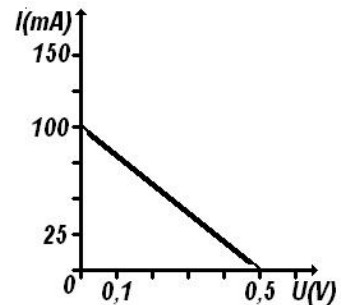


### Soluție - Problema I

#### Telefon solar (7 puncte)

O celula solară este un pătrat cu latura  $\ell = 1 \text{ cm}$  decupat dintr-o placetă subțire de siliciu. Atunci când primește lumină de la o sursă, celula devine baterie fotovoltaică. Așa cum într-o baterie chimică se petrece conversia energiei chimice în energie electrică, în bateria fotovoltaică se petrece conversia energiei luminoase care cade pe suprafața celei în energie electrică.

Când celula solară este expusă fluxului luminos al Soarelui, ea primește  $\varphi = 1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Dacă în aceste condiții celula solară este legată în serie cu un rezistor cu rezistență electrică variabilă  $R$  și cu un ampermetru ideal, iar în paralel cu ea se leagă un voltmetru ideal, atunci prin variația rezistenței și reprezentarea perechilor de valori curent – tensiune indicate de aparate se obține o „caracteristică  $I - V$ ”, al cărei grafic este prezentat în figura alăturată.



a. Trasează graficul puterii electrice furnizate de celula solară, ca funcție de curentul electric ce trece prin celulă.

b. Determină valoarea puterii maxime furnizate de celula solară.

c. Calculează valoarea randamentului maxim al conversiei energiei solare în energie electrică furnizată în circuitul exterior, în condițiile în care celula solară furnizează putere maximă.

d. Dedu valoarea rezistenței variabile  $R$  pentru care randamentul conversiei este maxim, în condițiile precizate la punctul c..

Pentru alimentarea unui telefon de urgență pe o autostradă, se folosește o baterie chimică având tensiunea la borne  $U = 4,5 \text{ V}$  când debitează puterea  $P = 9 \text{ W}$  pe telefon. Se dorește alimentarea telefonului cu un ansamblu format din celule solare de tipul celei descrise anterior, conectate între ele.

e. Determină modul de asamblare a celulelor în panoul solar pentru a se putea realiza alimentarea telefonului în condiții identice celor în care era alimentat cu bateria chimică. Celulele solare trebuie să debiteze putere maximă, iar randamentul conversiei energiei solare în energie electrică utilizată trebuie să fie maxim.

#### Soluție la „Telefon solar”

Celula solară este o baterie caracterizată prin tensiunea electromotoare  $E$  și rezistența internă  $r$ . Legătura liniară dintre curentul care trece prin circuit și tensiunea la bornele celei este

$$\begin{cases} U = E - r \cdot I = R \cdot I \\ I = \frac{E - U}{r} \end{cases} \quad (0.1)$$

pentru

$$0 < R < \infty \quad (0.2)$$

Punctele extreme prin care trece caracteristica  $I - V$  liniară sunt  $(0;0,1)$  respectiv  $(0,5;0)$ .

Pentru punctele respective relația (2.1) se scrie

$$\begin{cases} 0,1 = \frac{E - 0}{r} \\ 0 = \frac{E - 0,5}{r} \end{cases} \quad (0.3)$$

Din sistemul (2.3) rezultă

$$\begin{cases} E = 0,5V \\ r = 5\Omega \end{cases} \quad (0.4)$$

Prin urmare relația (2.1) se scrie

$$U = (0,5 - 5 \cdot I) \quad (0.5)$$

ceea ce conduc e la

$$\begin{cases} P = U \cdot I = U \cdot \left( \frac{0,5 - U}{5} \right) \\ P = \frac{1}{5} (-U^2 + 0,5U) \end{cases} \quad (0.6)$$

Graficul dependenței puterii de tensiunea la bornele celulei solare este o parabolă „cu vârful în sus” prezentată în figura 2.1.

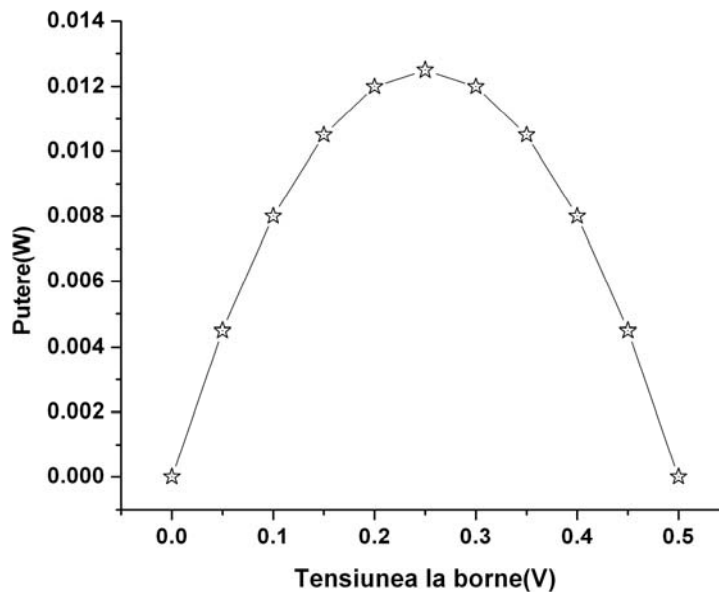


Figura 0.1\*

Punctele de intersecție cu axa sunt

$$\begin{cases} U_1 = 0V \\ U_2 = 0,5V \end{cases} \quad (0.7)$$

iar coordonatele vârfului sunt

$$\begin{cases} U_{\text{vârf}} = 0,25V \\ P_{\text{vârf}} = 12,5mW \end{cases} \quad (0.8)$$

Puterea maximă furnizată de bateria solară este

$$P_{\text{max im}} = 12,5mW \quad (0.9)^*$$

Puterea colectată de celula solară care are aria

$$S = 1cm^2 = 10^{-4} m^2 \quad (0.10)$$

este

$$\begin{cases} P_{colectat} = \varphi \cdot S \\ P_{colectat} = 1000 \cdot 10^{-4} W = 0,1W \end{cases} \quad (0.11)$$

Prin urmare randamentul maxim al celulei, corespunzător puterii electrice maxime este

$$\begin{cases} \eta = \frac{P_{maxim}}{P_{colectat}} \\ \eta = \frac{0,0125}{0,1} 0,125 = 12,5\% \end{cases} \quad (0.12)$$

Curentul care trece prin circuit atunci când puterea debitată este maximă are expresia

$$\begin{cases} P_{vârf} = U_{vârf} \cdot I_{vârf} \\ I_{vârf} = \frac{P_{vârf}}{U_{vârf}} \end{cases} \quad (0.13)$$

și valoarea

$$I_{vârf} = \frac{0,0125}{0,25} = 0,05 A = 50 mA \quad (0.14)$$

Rezistența circuitului exterior pentru care puterea debitată este maximă este – conform relațiilor (2.8)

$$\begin{cases} R = \frac{U_{vârf}}{I_{vârf}} \\ R = 5 \Omega \end{cases} \quad (0.15)^*$$

Așa cum era firesc, rezistorul pe care puterea debitată este maximă are rezistența egală cu rezistența internă a bateriei.

Telefonul care funcționează la tensiunea de  $4,5V$  și are puterea de  $9W$  este străbătut de curentul  $I_{telefon} = 2A$  și are rezistența internă  $r_{telefon} = 2,25\Omega$

Pentru realizarea tensiunii de funcționare este necesară legarea în serie a câte  $m$  baterii urmată de legarea în paralel a  $n$  astfel de șiruri de baterii.

Bateria astfel construită are tensiunea electromotoare

$$\begin{cases} E_{panou} = m \cdot E \\ E_{panou} = 0,5 \cdot m \end{cases} \quad (0.16)$$

și rezistența internă

$$\begin{cases} r_{panou} = \frac{mr}{n} \\ r_{panou} = \frac{5 \cdot m}{n} \end{cases} \quad (0.17)$$

Curentul care trece prin circuitul cu panou solar și telefon are expresia

$$I = \frac{0,5 \cdot m}{\frac{5 \cdot m}{n} + 2,25} \quad (0.18)$$

Pentru ca panoul să lucreze în condiții de randament maxim, rezistența internă a panoului trebuie să fie egală cu rezistența externă adică

$$\frac{5 \cdot m}{n} = 2,25 \Omega \quad (0.19)$$

În aceste condiții realizarea valorii intensității curentului electric necesare funcționării telefonului este

$$\begin{cases} I_{\text{telefon}} = \frac{0,5 \cdot m}{\frac{5 \cdot m}{n} + 2,25} = \frac{0,5 \cdot m}{4,5} \\ 2 = \frac{0,5 \cdot m}{4,5} \end{cases} \quad (0.20)$$

și prin urmare

$$m = 18 \quad (0.21)^*$$

Din relația (2.19) rezultă

$$\begin{cases} \frac{5 \cdot 18}{n} = 2,25 \\ n = 40 \end{cases} \quad (0.22)^*$$

Prin urmare, panoul solar trebuie să aibă 40 de șiruri de câte 18 celule.

Suprafața panoului este

$$S_{\text{panou}} = 18 \times 40 = 720 \text{ cm}^2 = 0,072 \text{ m}^2 \quad (0.23)$$

Energia colectată de acest panou este

$$\varphi_{\text{colectat}} = S_{\text{panou}} \times \varphi = 72 \text{ W} \quad (0.24)$$

Cu randamentul maxim, energia electrică furnizată este

$$P_{\text{panou}} = 0,125 \times 72 = 9 \text{ W} \quad (0.25)$$

Rezultatul este o verificare a rezolvării corecte.

O altă posibilă legare este aceea în care sunt construite grupuri de  $m$  celule solare legate în paralel și apoi  $n$  astfel de grupuri sunt legate în serie. Prin acest tip de legare se construiește o baterie cu tensiunea electromotoare

$$\begin{cases} E_{\text{paralel}} = n \cdot E \\ E_{\text{paralel}} = 0,5 \cdot n \end{cases} \quad (0.26)$$

și rezistența internă

$$\begin{cases} r_{\text{paralel}} = n \cdot \frac{r}{m} \\ r_{\text{paralel}} = n \cdot \frac{5}{m} \end{cases} \quad (0.27)$$

Curentul care trece prin bateria echivalentă are expresia

$$I = \frac{0,5 \cdot n}{\frac{5n}{m} + 2,25} \quad (0.28)$$

Condiția de obținere a puterii maxime este egalitatea dintre rezistența internă a bateriei și rezistența telefonului iar curentul care trebuie furnizat are intensitatea de  $2A$ . Din relația (2.28) rezultă

$$\begin{cases} 2 = \frac{0,5 \cdot n}{4,5} \\ n = 18 \end{cases} \quad (0.29)$$

iar din (2.27) rezultă că

$$\begin{cases} 2,25 = 18 \cdot \frac{5}{m} \\ m = 40 \end{cases} \quad (0.30)$$

Un panou care corespunde cerințelor este alcătuit prin inserierea a 40 de grupe de câte 18 celule legate în paralel. Și pentru această legare aria panoului este

$$S_{\text{panou}} = 18 \times 40 = 720 \text{ cm}^2 = 0,072 \text{ m}^2$$

Soluție propusă de:

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – MECT*  
*Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București*



## Soluție - Problema II

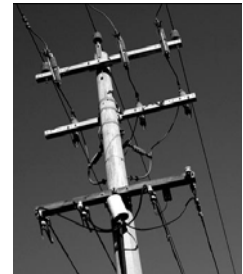
### A. Telegraf cu un fir (7 puncte)

1. Spațiul dintre o sferă metalică de rază  $a$  și o pătură sferică metalică de rază  $b$  perfect conductoare, concentrice, este umplut cu un material cu rezistivitatea electrică  $\rho$ . Poți considera ansamblul ca fiind alcătuit dintr-un număr foarte mare  $n$  de păături sferice concentrice cu „grosimea”  $\delta = (b-a)/n$  și cu raze  $r_k = k \cdot \delta + a$ ;  $1 \leq k \leq n$ . Dacă este util, poți considera că  $r_k^2 = r_k \cdot r_{k-1}$ .

- Scris expresia rezistenței electrice a unei „pături” elementare.
- Dedu expresia rezistenței electrice măsurată între sfera metalică și pătura metalică.

2. Pentru o conexiune telegrafică este necesar un singur fir. Capetele firului, aflate la o distanță foarte mare  $L$  unul de altul sunt legate la electrozi - sfere metalice de rază  $a$  și sunt îngropate în pământ, la adâncime mare. Presupune că solul este uniform și că are rezistivitatea  $\rho$ . Astfel, cel de-al doilea conductor este chiar solul. Consideră că solul – conductor poate fi modelat printr-un ansamblu alcătuit din două sfere de pământ concentrice cu electrozii și având raze  $b$ ,  $a \ll b \ll L$ ;  $La \ll b^2$ , înseriate cu un rezistor cilindric cu raza  $b$  și lungimea  $L - 2b$ .

- Desenează o schemă electrică echivalentă pentru „conductorul pământ”.
- Scris expresiile rezistențelor electrice pentru sfere și cilindru.
- Determină valoarea rezistenței electrice a pământului între sferele metalice (electrozi) pentru situația în care  $\rho = 3,14 \Omega \cdot m$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $L = 1 \text{ km}$  și  $b = 100 \text{ m}$ .



### Telegraf cu un fir - Soluție

a. Rezistența electrică a sferei conductoare cu raza

$$r_k = a + k \cdot \delta$$

este

$$R_k = \rho \frac{\delta}{4\pi \cdot r_k^2} \quad (0.1)$$

Deoarece

$$r_k = r_{k-1} + \delta \quad (0.2)$$

și ținând seama de sugestia rezonabilă propusă în enunț,

$$\begin{cases} R_k = \rho \frac{\delta}{4\pi \cdot r_k^2} = \rho \frac{\delta}{4\pi \cdot r_k \cdot r_{k-1}} \\ R_k = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\delta}{(r_{k-1} + \delta) \cdot r_{k-1}} = \frac{\rho}{4\pi} \left( -\frac{1}{(r_{k-1} + \delta)} + \frac{1}{r_{k-1}} \right) \\ R_k = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{k-1}} - \frac{1}{r_k} \right) \end{cases} \quad (0.3)^*$$

Din punct de vedere electric plăcuțele sferice sunt rezistențe electrice dispuse în serie.

**b.** Rezistența electrică a ansamblului de plăcuțe sferice dintre sfera interioară și plăcuța sferică exterioară este

$$\left\{ \begin{aligned} R &= \sum_{k=1}^n R_k = \rho \frac{\delta}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k^2} = \rho \frac{\delta}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k \cdot r_{k-1}} \\ R_k &= \frac{\rho}{4\pi} \frac{\delta}{(r_{k-1} + \delta) \cdot r_{k-1}} = \frac{\rho}{4\pi} \left( -\frac{1}{(r_{k-1} + \delta)} + \frac{1}{r_{k-1}} \right) \\ R &= \frac{\rho}{4\pi} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{r_{k-1}} - \frac{1}{r_k} \right) = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \\ R &= \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n} \right) \end{aligned} \right. \quad (0.4)$$

Ținând seama că

$$\left\{ \begin{aligned} r_0 &= a \\ r_n &= a + \frac{b-a}{n} \cdot n = b \end{aligned} \right. \quad (0.5)$$

rezistența cerută se scrie ca

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (0.6)^*$$

În cazul în care

$$b \gg a \quad (0.7)$$

relația (3.6) se rescrie

$$R = \frac{\rho}{4\pi \cdot a} \quad (0.8)$$

Evident, rezistența se poate calcula rapid definind o rezistență elementară infinitesimală

$$dR = \frac{\rho \cdot dr}{4\pi \cdot r^2} \quad (0.9)$$

care prin integrare conduce la

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (0.10)$$

**c.** O reprezentare schematică a solului conductor este prezentată în figura 3.1.

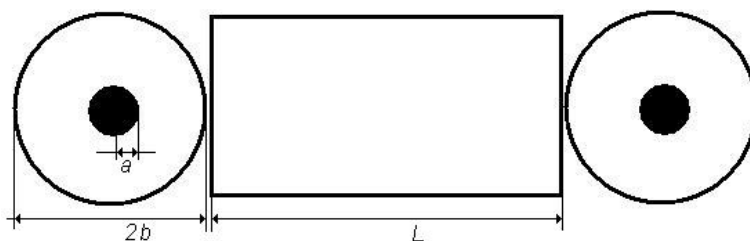


Figura 0.1\*

Schema electrică echivalentă a configurației reprezentate mai sus este



Figura 0.2\*

Ținând seama că

$$a \ll b \ll L \quad (0.11)$$

d. Elementele constitutive ale schemei au valorile

$$R_{sferă} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cong \frac{\rho}{4\pi \cdot a} \quad (0.12)$$

respectiv

$$R_{cilindru} = \frac{\rho(L-2b)}{\pi \cdot b^2} \cong \frac{\rho \cdot L}{\pi \cdot b^2} \quad (0.13)$$

Dacă admitem că

$$La \ll b^2 \quad (0.14)$$

rezultă că

$$\frac{L}{b^2} \ll \frac{1}{a} \quad (0.15)$$

și deci

$$R_{cilindru} \ll R_{sferă} \quad (0.16)$$

e. Rezistența solului este

$$\begin{cases} R_{sol} = 2 \cdot R_{sferă} + R_{cilindru} \cong 2 \cdot R_{sferă} \\ R_{sol} = \frac{\rho}{2\pi \cdot a} \end{cases} \quad (0.17)^*$$

Numeric,

$$R_{sol} = \frac{3,14}{2\pi \cdot 0,1} \cong 5\Omega \quad (0.18)^*$$

### ***B. Hrană pentru câini foarte leneși (3 puncte)***

Pentru un câine foarte leneș singura modalitate de pierdere de energie este disiparea de căldură în mediu.

Consideră că ai doi câini foarte leneși, din aceeași rasă, unul de 20 kg și altul de 10 kg. Dacă temperaturile câinilor sunt egale și mediul este același, pierderea de energie este direct proporțională cu suprafața corpului fiecărui câine. Apreciază de câte ori este mai mare cantitatea de mâncare pe care ar trebui să o dai câinelui de 20 kg decât cea pentru câinele de 10 kg.

### ***B. Hrană pentru câini foarte leneși - Soluție***

Conform enunțului, pentru câinele foarte leneș, singura modalitate de pierdere a energiei este disiparea căldurii către mediu. Dacă temperaturile câinilor sunt egale și mediul este același, această pierdere de energie este proporțională cu suprafața corpului câinilor. Întrucât volumul este proporțional cu masa (pentru densități egale) creșterea de două ori a masei produce o creștere de 2 ori a volumului, o creștere de  $2^{\frac{1}{3}}$  a dimensiunilor lineare și deci o creștere de  $2^{\frac{2}{3}}$  a suprafeței. Pentru compensarea pierderilor de căldură, cantitatea de hrană necesară trebuie să fie de  $2^{\frac{2}{3}} \approx 1,587$  ori mai mare.

Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – MECT  
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București