



Problema I - soluție

A. Particulă în mișcare unidimensională (6 puncte)

Determină dependența de timp a poziției pentru o particulă cu masa de repaus m_0 care pleacă din repaus într-o mișcare relativistă unidimensională sub acțiunea unei forțe constante F .

A. Particulă în mișcare unidimensională - soluție

Ecuția de mișcare se scrie sub forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = F$$

unde $v = dx/dt$

După derivare

$$m_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dv}{dt} = F$$

Notând raportul constant cu $a = F/m_0$ și integrând relația de mai sus

$$\int_0^v \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)^{-3/2} dv = \int_0^t a \cdot dt$$

adică

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = at$$

dar, $v = dx/dt$ și din relația de sus rezultă

$$\frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}$$

de unde

$$x = \int_0^t \frac{atdt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a} \left(1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2 \right)$$

adică dependența hiperbolică

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2} - \frac{t^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = 1$$

B. Antenă (4 puncte)

Perioada oscilațiilor transversale proprii ale unei antene de transmisie de microunde, subțire, care are o structură de grinzi din oțel este T . De câte ori este mai mare perioada de oscilație a unei antene construite din același oțel, dar care are toate dimensiunile lineare de două ori mai mari? (Masele instalațiilor suplimentare montate pe antenă sunt neglijabile față de masa antenei)

Antenă – soluție

Antena seamănă foarte bine cu un diapazon. Așa cum este bine cunoscut frecvența diapazonului nu depinde de poziția în care se află acesta în timp ce vibrează. Este foarte rezonabil să admitem că perioada oscilației proprii a antenei, T , depinde de parametrii de material importanți în procesele mecanice adică densitatea ρ și modulul de elasticitate E . Perioada oscilației proprii mai depinde de lungimea L a antenei. Putem scrie deci că

$$T = \wp L^\alpha E^\beta \rho^\gamma \quad (0.1)$$

unde \wp este o constanta adimensională.

Dimensional, relația de mai sus se scrie în forma

$$T = M^{\beta+\gamma} T^{-2\beta} L^{\alpha-3\gamma-\beta} \quad (0.2)$$

Din relația (1.20) rezultă

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases} \quad (0.3)$$

și putem admite pentru perioada oscilațiilor proprii o expresie de tipul

$$T = \wp \cdot L \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (0.4)$$

Pentru antena modificată, densitatea și modulul Young nu variază astfel că perioada oscilațiilor proprii va fi

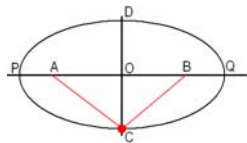
$$T' = \wp \cdot 2 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} = 2 \cdot T \quad (0.5)$$



Problema a II-a

A Mărgică (7 puncte)

Un fir inextensibil și cu masa neglijabilă având lungimea 2ℓ este suspendat în punctele A și B situate pe aceeași orizontală la distanța $2d$ unul de altul ($d < \ell$). O mărgică mică și grea poate aluneca fără frecare pe fir. Determină expresia perioadei micilor oscilații ale mărgicei în planul vertical care trece prin punctele de suspensie ale firului. Accelerația gravitațională este g .



Ține eventual seamă că:

elipsa este locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe este constantă. Analitic, într-un sistem de coordonate cartezian, ecuația elipsei este $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ unde $|OP| = |OQ| = a$ este semi-axa mare a elipsei iar

$|OC| = |OD| = b$ este semi-axa mică. Pentru situația din problemă $|AC| = |CB| = \ell$ și

$|AO| = |OB| = d$. Pentru punctul P constanța sumei distanțelor conduce la $|PA| + |PB| = a - d + a + d = 2a = 2\ell$.

A Mărgică – Soluție

Deoarece suma distanțelor de la mărgică la punctele A și B este tot timpul 2ℓ , traiectoria mărgicei este un arc de elipsă cu semi-axa mare

$$a = \ell \quad (0.1)$$

și semi-axa mică

$$b = \sqrt{\ell^2 - d^2} \quad (0.2)$$

Ecuația traiectoriei este

$$\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{(\ell^2 - d^2)} = 1 \quad (0.3)$$

sau, deoarece mișcarea se desfășoară pe arcul inferior al elipsei,

$$y = -\sqrt{\ell^2 - d^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \quad (0.4)$$

Considerând

$$y = 0 \quad (0.5)$$

ca punct de referință pentru energia potențială – punct de energie potențială nulă, se poate scrie expresia energiei potențiale gravitaționale a mărgicei sub forma

$$U = m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \quad (0.6)$$

Minimul energiei potențiale se realizează pentru

$$x = 0 \quad (0.7)$$

Pentru deplasări mici $x \ll \ell$, folosind dezvoltarea sugerată pentru radical, energia potențială se scrie

$$\begin{cases} U = m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} \right) \\ U = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} + \frac{m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{2\ell^2} \cdot x^2 \\ U = U_0 + \frac{k}{2} \cdot x^2 \end{cases} \quad (0.8)$$

cu o „constantă elastică”

$$k = \frac{m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2} \quad (0.9)$$

Scrisă în ultima formă din () expresia energiei potențiale a mărgelei este similară celei scrise pentru un oscilator armonic

$$U - U_0 = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \quad (0.10)$$

Pulsăția oscilației mărgelei se poate deci scrie sub forma

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2} \\ \omega = \sqrt{\frac{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2}} \end{cases} \quad (0.11)$$

Perioada oscilației este deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot \ell}{\sqrt{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}} \quad (0.12)$$

Așa cum era de așteptat, pentru $d \ll \ell$ perioada devine

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (0.13)$$

identică aceleia a unui pendul simplu

B. Condensarea norului galactic (3 puncte)

Un nor sferic, omogen, de praf intergalactic având densitatea ρ se află inițial în repaus și este caracterizat printr-o rază R . După un interval de timp, norul se condensează într-un volum foarte mic, în propriul câmp gravitațional. Constanta atracției universale este K . De câte ori este mai mare timpul în care se condensează un nor de praf care are aceeași densitate inițială, dar care are diametrul inițial de două ori mai mare?

Condensarea norului galactic - Soluție

Natura norului este caracterizată prin densitatea sa ρ , iar geometria norului este caracterizată prin raza R . Natura interacțiunii este caracterizată de constanta K a atracției universale. Timpul de condensare T al norului trebuie să depindă de aceste trei cantități. Se poate deci scrie

$$T = \wp \cdot \rho^\alpha \cdot K^\beta \cdot R^\gamma \quad (0.1)$$

unde \wp este o constanta adimensională. Principiul omogenității dimensionale cere ca dimensiunea termenului din stânga al expresiei de mai sus să fie $[T]$. Dimensiunile mărimilor care intră în expresie sunt

$$\begin{cases} [\rho] = M \cdot L^{-3} \\ [R] = L \\ [K] = L^3 T^{-2} M^{-1} \end{cases} \quad (0.2)$$

Dimensional, relația (1.1) se scrie prin urmare

$$[T] = M^{\alpha} \cdot L^{-3\alpha} \cdot L^{3\beta} \cdot T^{-2\beta} \cdot M^{-\beta} \cdot L^{\gamma} = M^{\alpha-\beta} \cdot T^{-2\beta} \cdot L^{-3\alpha+3\beta+\gamma} \quad (0.3)$$

Din principiul omogenității dimensionale rezultă

$$\begin{cases} -2\beta = 1 & \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha - \beta = 0 & \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ -3\alpha + 3\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases} \quad (0.4)$$

Forma timpului de condensare este

$$T = \frac{\wp}{\sqrt{K \cdot \rho}} \quad (0.5)$$

Pentru cele două situații timpul de condensare va fi același.

Soluție propusă de:

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației
Cercetării și Tineretului*

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București