

1 Piuă de decorticat orezul acționată hidraulic

1.A Soluția Problemei

Piuă hidraulică de decorticat orezul are parametrii prezentați în Figura 1.1. Masa balansoarului (inclusiv băătorul dar fără apă) este $M = 30\text{ kg}$. Centrul de masă al balansoarului este G . Balansoarul se rotește în jurul axei T (proiectată în figură în punctul T). Momentul de inerție al balansoarului în jurul lui T este $I = 12\text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Distanța dintre linia GT și fața de sus a balansoarului este $h' = 0,08\text{ m}$. Când în căuș este apă, masa apei se notează cu m și centrul de masă al apei este notat cu N .

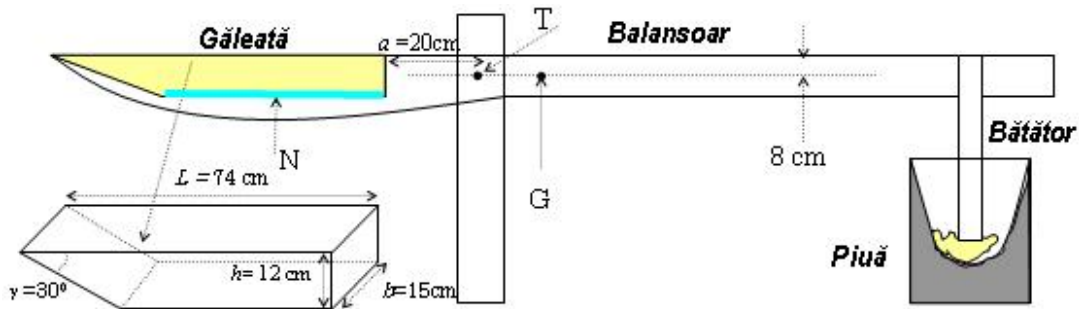


Figura 1.1

Unghiul de înclinare al balansoarului față de orizontală este α . Dimensiunile balansoarului și căușului sunt indicate de asemenea în Figura 1.1. Se neglijează frecările la ax și forța datorată căderii apei în căuș. În problemă se consideră suprafața apei ca fiind mereu orizontală.

1.A.1 Determinarea parametrilor de structură ai pivei

1.A.1.a Calculul distanței dintre centrul de greutate al balansoarului și axul de rotire.

Conform enunțului, masa de apă din căuș în momentul în care balansoarul începe să se rotească este $m = 1\text{ kg}$. Volumul apei din căuș este (presupunând – rezonabil – că densitatea apei este

$$\rho_{\text{apă}} = 1000\text{ kg} / \text{m}^3)$$

$$V = 1000\text{ cm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3 \quad (1.1)$$

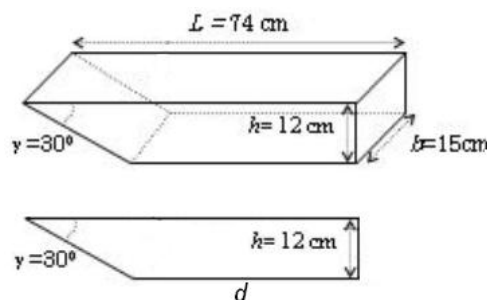


Figura 1.2

Ca în figură, secțiunea în căuș perpendiculară pe axul balansoarului este un trapez dreptunghic. Diferența ℓ dintre lungimea bazei mari (de sus) a secțiunii și lungimea bazei mici (de jos) este corelată cu înălțimea secțiunii trapezoidale prin relația

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{\ell} \quad (1.2)$$

Prin urmare, lungimea bazei mici d a secțiunii prin căuș este

$$d = L - h \cdot \operatorname{ctg} \gamma \quad (1.3)$$

Valoarea numerică a acestei lungimi este

$$\begin{cases} d = (0,74 - 0,12 \cdot \operatorname{ctg} 30) m \\ d \cong 0,53 m \end{cases} \quad (1.4)$$

Evident, în situația descrisă de enunț (atunci când balansoarul începe să se rotească – după ce a avut fața de jos a căușului în poziție orizontală) căușul nu este neapărat plin cu apă. Înălțimea c până la care căușul este plin cu apă se poate determina cerând ca volumul căușului umplut până la înălțimea c să fie V .

Volumul căușului este dat de produsul dintre aria secțiunii sale trapezoidale S_{trapez} și lățimea sa

b (dimensiunea căușului pe direcția paralelă cu axul balansoarului)

Deoarece aria trapezului este dată de produsul lungimii înălțimii prin semisuma lungimilor bazelor

$$S_{\text{trapez}} = c \cdot [(d) + (d + c \cdot \operatorname{ctg} \gamma)] / 2 \quad (1.5)$$

volumul de lichid din căuș are expresia

$$\begin{cases} V = b \cdot S_{\text{trapez}} = \frac{c \cdot b}{2} \cdot [(d) + (d + c \cdot \operatorname{ctg} \gamma)] \\ V = bcd + \frac{b \cdot \operatorname{ctg} \gamma}{2} \cdot c^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

și deci

$$\begin{cases} c^2 + \frac{2d}{\operatorname{ctg} \gamma} \cdot c - \frac{2 \cdot V}{b \cdot \operatorname{ctg} \gamma} = 0 \\ c^2 + \frac{2d}{\sqrt{3}} \cdot c - \frac{2 \cdot V}{b \cdot \sqrt{3}} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

În consecință, înălțimea la care apa se ridică în căuș are expresia

$$c = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 2\sqrt{3} \cdot V / b}}{\sqrt{3}} \quad (1.8)$$

Valoarea numerică a înălțimii la care apa se ridică în căuș în momentul începerii rotirii este

$$\begin{cases} c \cong \frac{-0,53 + \sqrt{0,53^2 + 2\sqrt{3} \cdot 0,001/0,15}}{\sqrt{3}} \approx 0,0123 \\ c \cong 0,01m \end{cases} \quad (1.9)$$

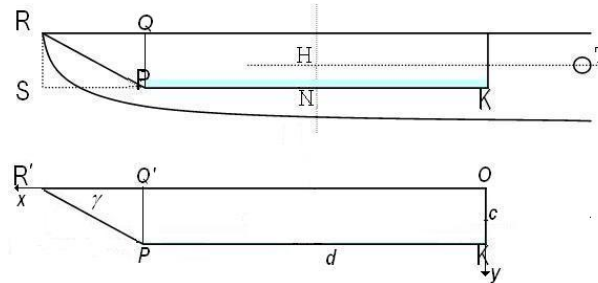


Figura 1.3

Comparând dimensiunile căușului cu înălțimea stratului de apă, rezultă că acest strat este foarte subțire – de grosime neglijabilă.

În sistemul de referință reprezentat în imaginea din Figura 1.3, în care este prezentată forma secțiunii în apa din căuș, centrul de greutate al dreptunghiului $OQ'PK$ cu aria

$S_{dreptunghi} = c \cdot d$ este plasat în punctul de coordonate $(x_{dreptunghi}, y_{dreptunghi}) = (c/2, d/2)$.

Coordonatele vârfurilor triunghiului $R'QP$ sunt

$$\begin{cases} R'(d + c \cdot \text{ctg}\gamma, 0) \\ Q'(d, 0) \\ P(d, c) \end{cases} \quad (1.10)$$

Prin urmare coordonatele centrului de greutate al triunghiului (care are aria

$S_{triunghi} = c^2 \cdot \text{ctg}\gamma/2$) sunt

$$\begin{aligned} (x_{G\text{triunghi}}, y_{G\text{triunghi}}) &= \left(\frac{x_{R'} + x_P + x_Q}{3}, \frac{y_{R'} + y_P + y_Q}{3} \right) \\ (x_{G\text{triunghi}}, y_{G\text{triunghi}}) &= (d + (c/3) \cdot \text{ctg}\gamma, c/3) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Tabelul 1.1. cumulează datele referitoare la cele două părți care constituie secțiunea trapezoidală a căușului

Tabelul 1.1

Suprafață	x_{parte}	y_{parte}
$c^2 \cdot ctg\gamma/2$	$d + (c/3) \cdot ctg\gamma$	$c/3$
$c \cdot d$	$d/2$	$c/2$

Pentru o „placă plană” compusă din K bucăți având fiecare centrul de greutate plasat în (x_{Gi}, y_{Gi}) și suprafața S_i centrul de greutate are coordonatele

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\sum_{i=1}^K x_{Gi} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^K S_i} \\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^K y_{Gi} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^K S_i} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Folosind notația

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{c}{d} \cdot ctg\gamma \\ \delta \cong 0,04 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

coordonatele (în planul perpendicular pe axă) ale centrului de greutate N pentru „placa” trapezoidală de apă vor fi

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{G\text{trapez}} = \frac{(c^2/2) \cdot ctg\gamma \cdot (d + (c/3) \cdot ctg\gamma) + c \cdot d^2/2}{(c^2/2) \cdot ctg\gamma + c \cdot d} \\ x_{G\text{trapez}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1 + \frac{c}{d} \cdot ctg\gamma + \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{d^2} \cdot ctg^2\gamma}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{d} \cdot ctg\gamma} \cong \frac{d}{2} \cdot \frac{1 + \delta}{1 + (1/2)\delta} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

respectiv

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{G\text{trapez}} = \frac{\frac{c}{3} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot ctg\gamma + \frac{c^2 \cdot d}{2}}{\frac{c^2}{2} \cdot ctg\gamma + c \cdot d} \\ y_{G\text{trapez}} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1 + (1/3)\delta}{1 + (1/2)\delta} \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Valorile numerice corespunzătoare sunt

$$\begin{cases} x_{G \text{ trapez}} \cong 0,47 \text{ m} \\ y_{G \text{ trapez}} \cong 0,006 \text{ m} \end{cases} \quad (1.16)$$

Centrul de greutate al apei din căuș se află sub linia TG determinată de ax și centrul de greutate al balansoarului dar brațul greutății apei este HT , (H fiind proiecția verticală a punctului N pe linia TG) adică $x_{G \text{ trapez}}$

$$HT = x_{G \text{ trapez}} \quad (1.17)$$

Condiția de echilibru a balansoarului cere egalitatea momentelor determinate de greutatea balansoarului și greutatea apei din căuș adică

$$HT \cdot m \cdot g = TG \cdot M \cdot g \quad (1.18)$$

și prin urmare

$$TG = (m/M) \cdot HT \quad (1.19)$$

cu valoarea numerică

$$\begin{cases} TG = \frac{1}{30} \cdot 0,47 \cong 0,0157 \text{ m} \\ TG \cong 0,016 \text{ m} \end{cases} \quad (1.20)^*$$

1.A.1.b Determinarea plajei de înclinări pentru care căușul „dă pe-afară”

Știind că apa începe să curgă din căuș atunci când unghiul dintre balansoar și axa orizontală de coordonate atinge valoarea α_1 și că căușul se golește complet atunci când acest unghi devine α_2 se cere determinarea valorilor acestor două unghiuri. Se presupune că, după momentul în care se atinge egalitatea momentelor greutății apei și greutății balansoarului, balansoarul începe să se rotească ridicând pistilul și că, în cursul acestei ridicări, cantitatea de apă care se adaugă celei existente în căuș este neglijabilă.

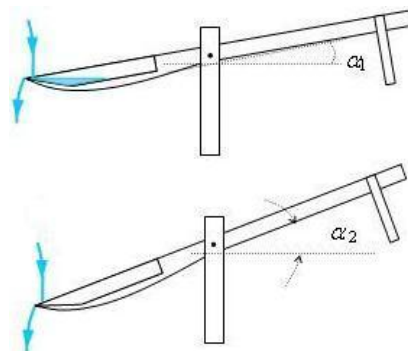


Figura 1.4

Deoarece stratul de apă din căuș este foarte subțire în momentul în care balansoarul începe să se rotească, se poate admite că în momentul în care apa începe să curgă din căuș secțiunea perpendiculară pe ax a volumului de apă din căuș este triunghiulară – ca în figura 1.4. Prisma triunghiulară de apă are înălțimea b ; baza triunghiulară a prisme are baza PB și înălțimea $RS = h$.

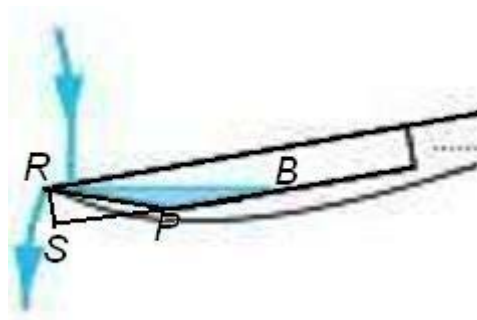


Figura 1.5

Din considerente geometrice volumul prisme de apă din căuș în momentul în care apa începe să curgă este

$$V = m/\rho_{ap\acute{a}} = b \cdot h \cdot \frac{PB}{2} \quad (1.21)$$

și deci

$$PB = 2m/\rho_{ap\acute{a}} \cdot h \cdot b \quad (1.22)$$

Valoarea numerică a lungimii PB a zonei acoperite de apă când apa începe să curgă din căuș este

$$PB \cong 0,11m \quad (1.23)$$

mai mică decât lungimea d a feței de jos a căușului. (Ipoteza că apa se așează într-o formă de prismă triunghiulară este prin urmare corectă)

Deoarece unghiul $RPS = \gamma$, în triunghiul ΔRPS

$$SP = h \cdot ctg\gamma \quad (1.24)$$

În ΔRBS

$$tg\alpha_1 = \frac{h}{h \cdot ctg\gamma + PB} = \frac{1}{ctg\gamma + PB/h} \quad (1.25)$$

Numeric,

$$\begin{cases} tg\alpha_1 \cong 0,377 \\ \alpha_1 \cong 20,6^\circ \end{cases} \quad (1.26)^*$$

La rotirea cu 30° fața de jos a căușului devine orizontală și apa curge în întregime. Prin urmare $\alpha_2 = 30^\circ$

(1.27)*

1.A.1.c Determinarea unghiului de înclinare β pentru echilibrul momentelor forțelor care acționează asupra balansoarului

Se pune problema determinării unghiului β de înclinare a balansoarului la care, cantitatea de apă din căuș este suficientă pentru a determina un moment total nul al forțelor de greutate care acționează asupra balansoarului. Spre deosebire de situația analizată anterior în care balansoarul se afla în poziție orizontală iar secțiunea apei din căuș era trapezoidală, în această nouă situație balansoarul este înclinat iar secțiunea apei din căuș este triunghiulară – ca în figura 1.6.

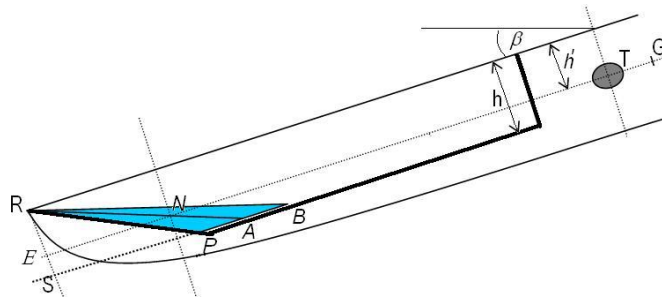


Figura 1.6

Dacă se notează $PB = x$ masa de apă din căuș este

$$m_1 = \frac{x \cdot h \cdot b}{2} \cdot \rho_{\text{apă}} \quad (1.28)$$

Secțiunea perpendiculară pe axul de rotație a prisme de apă din căuș este triunghiul PBR . Centrul de masă N al apei este localizat la două treimi de vârful R pe mediana RA . Deoarece înălțimea căușului este $h = 0,12 \text{ m}$ rezultă că, din motive de asemănare, N se află la $2h/3$ de fața de sus a căușului adică la $h' = 0,08 \text{ m}$. Deoarece conform desenului din figura 1.1. centrul de greutate al balansoarului și axul de rotație se află de asemenea la distanța $h' = 0,08 \text{ m}$ de fața de sus a balansoarului, rezultă că punctele N, T, G sunt coliniare.

Condiția ca momentul total care acționează asupra balansoarului să fie nul revine – în aceste condiții – la

$$(\overline{m_1 g}) \times \overline{TN} + (\overline{Mg}) \times \overline{TG} = 0 \quad (1.29)$$

sau

$$\begin{cases} m_1 \cdot |TN| \cdot \sin \beta = M \cdot |TG| \cdot \sin \beta \\ m_1 \cdot |TN| = M \cdot |TG| \end{cases} \quad (1.30)$$

Așa cum a fost deja calculat

$$M \cdot |TG| \cong 30 \cdot 0,016 = 0,48 \text{ kg} \cdot m \quad (1.31)$$

În triunghiul RSA $SP = h \cdot \text{ctg} \gamma$ și deci

$$SA = SP + PA = x/2 + h \cdot \text{ctg} \gamma \quad (1.32)$$

În concluzie

$$EN = \frac{2}{3} \cdot SA = \frac{2}{3} \cdot (x/2 + h \cdot \text{ctg} \gamma) \quad (1.33)$$

și deci

$$TN = L + a - \frac{2}{3} \cdot (x/2 + h \cdot \text{ctg} \gamma) \quad (1.34)$$

sau

$$\begin{cases} TN = 0,74 + 0,20 - \frac{2}{3} \cdot (x/2 + 0,12 \cdot \sqrt{3}) \\ TN = -\frac{x}{3} + 0,80 \end{cases} \quad (1.35)$$

Condiția de moment nul revine la

$$\begin{cases} m_1 \cdot TN = 0,48 \\ 9x \left(0,80 - \frac{x}{3} \right) = 0,48 \\ 3x^2 - 7,20x + 0,48 = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Soluțiile ecuației sunt

$$\begin{cases} x_1 = 2,33 \text{ m} \\ x_2 = 0,068 \text{ m} \cong 0,07 \text{ m} \end{cases} \quad (1.37)$$

Deoarece baza triunghiului nu poate depăși lungimea căușului, soluția $x_1 > 0,54 \text{ m}$ nu poate fi acceptată și deci

$$x = 0,068 \text{ m} \cong 0,07 \text{ m} \quad (1.38)^*$$

Masa de lichid din căuș în momentul anulării momentului care acționează asupra balansoarului este

$$m_1 = 9x = 0,61 \text{ kg} \quad (1.39)^*$$

Fața RB a lichidului fiind orizontală,

$$\forall RBS = \beta \quad (1.40)$$

și

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\forall RBS) = \frac{h}{x + h \cdot \operatorname{ctg} \gamma} \quad (1.41)$$

Valoarea unghiului β este

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \beta \cong \frac{0,12}{0,12 \cdot \sqrt{3} + 0,068} = 0,43 \\ \beta \cong 23,51^\circ \cong 23,6^\circ \end{cases} \quad (1.42)^*$$

1.A.2 Determinarea parametrilor care descriu situației în care piua lucrează

În situația în care apa curge în căuș cu un debit Φ constant și mic și cantitatea de apă care curge în căuș în cursul mișcării balansoarului este neglijabilă se poate studia dependența momentului care acționează balansoarul de unghiul de rotire a acestuia față de orizontală.

1.A.2.a Schița graficului $\mu(\alpha)$

Un grafic calitativ se poate trasa pe baza indicațiilor din enunț referitoare la funcționare și a valorilor numerice pentru unghiurile de înclinare și momentele greutatei în pozițiile cheie ale balansoarului. Deoarece valorile importante ale unghiurilor de înclinare sunt deja cunoscute din (1.26), (1.27) și (1.42), pentru începerea trasării graficului $\mu(\alpha)$ al momentului μ , ca funcție de unghiul α în cursul unui ciclu de funcționare trebuie scrise explicit valorile pentru $\mu(\alpha)$ corespunzătoare unghiurilor α_1 , α_2 și $\alpha = 0$.

Inițial, atunci când balansoarul este în poziție orizontală iar în căuș nu este apă de loc, momentul care acționează asupra balansoarului l-ar face să se încline cu capătul având pistilul în jos. Se va considera în continuare că unghiul de rotire de acest tip este negativ. În această situație unghiul de înclinare a balansoarului este $\alpha = 0$ iar momentul care acționează asupra balansoarului este determinat numai de greutatea proprie și are valoarea

$$\mu(\alpha = 0) = M \cdot g \cdot TG \quad (1.43)$$

Valoarea numerică a momentului este

$$\begin{cases} \mu(\alpha = 0) = 30 \times 9,81 \times 0,016 N \cdot m \\ \mu(\alpha = 0) = 4,71 N \cdot m \end{cases} \quad (1.44)^*$$

Pe măsură ce apa curge în căuș, apare un moment datorat greutatei masei de apă acumulate în căuș. Acest moment produce o descreștere a momentului total – inițial negativ – care acționează asupra balansoarului. În momentul în care în căuș se acumulează masa de apă $m = 1 \text{ kg}$,

momentul trece prin zero și apoi devine ușor pozitiv iar balansoarul începe să se încline (cu capătul care poartă căușul în jos). Din acest moment cantitatea de apă din căuș rămâne constantă (conform enunțului) dar, datorită faptului că centrul de greutate al apei se îndepărtează de ax, se produce o creștere a momentului pozitiv total. Această creștere continuă până în momentul în care apa începe să curgă afară din căuș. Conform calculelor anterioare care au condus la relația (1.27) acest lucru se petrece atunci când $\alpha = \alpha_1 \cong 20,6^\circ$.

Dacă se rescrie relația (1.25) pentru această situație și se ține seama că, în conformitate cu Figura 1.5 $PB = 0,11m$ rezultă că

$$\begin{cases} TN = L + a - \frac{2}{3} \cdot (PB/2 + h \cdot \text{ctg}\gamma) \\ TN = 0,74 + 0,20 - \frac{2}{3} \cdot (0,11/2 + 0,12 \times \sqrt{3}) \cong 0,76m \end{cases} \quad (1.45)$$

În situația respectivă momentul care acționează asupra balansoarului este maxim și are expresia

$$\mu(\alpha_1) = (m \cdot TN - M \cdot TG) \cdot g \cdot \cos(\alpha_1) \quad (1.46)$$

Valoarea numerică a momentului maxim este

$$\mu(\alpha_1) = (1,00 \cdot 0,76 - 30 \cdot 0,016) \cdot 9,81 \cdot \cos(20,6^\circ) \cong 2,58 N \cdot m \quad (1.47)$$

Prin urmare,

$$\mu_{\max} = \mu(20,6^\circ) \cong 2,58 N \cdot m \quad (1.48)^*$$

După ce atinge marginea de sus a căușului apa începe să curgă și ca urmare momentul determinat de apa din căuș scade. În situația în care unghiul de înclinare al balansoarului atinge valoarea dată de relația (1.42) adică $\alpha = \beta = 23,6^\circ$

momentul total care acționează asupra balansoarului este nul

$$\mu(23,6^\circ) = 0 \quad (1.49)^*$$

Pentru înclinarea α_2 pentru care căușul este complet gol singurul moment care acționează asupra balansoarului este cel determinat de greutatea proprie având expresia,

$$\mu(\alpha_2) = M \cdot g \cdot TG \cdot \cos \alpha_2 \quad (1.50)$$

și valoarea numerică

$$\mu(30^\circ) = 30 \times 9,81 \times 0,0157 \times \sqrt{3} / 2 \cong 4,00 N \cdot m \quad (1.51)^*$$

Cu valorile numerice găsite, timpii evoluției momentului ca funcție de cantitatea de apă din căuș și de valoarea unghiului de înclinare sunt prezentați calitativ în Figura 1.7

- Inițial, când căușul este goală și balansoarul orizontal, momentul datorat în întregime greutății proprii are valoarea dată de (1.44)
- Pe măsură ce apa curge în căuș, ea determină apariția unui moment de sens contrar

(considerat pozitiv) astfel încât în momentul în care apa din căuș atinge înălțimea $c \cong 0,01m$ momentul se anulează (punctul O în graficul din figura 1.7), balansoarul începe să se încline și ulterior, datorită deplasării apei spre partea înclinată a căușului momentul crește din ce în ce mai repede – până la atingerea situației descrise de punctul A din Figura 1.7.

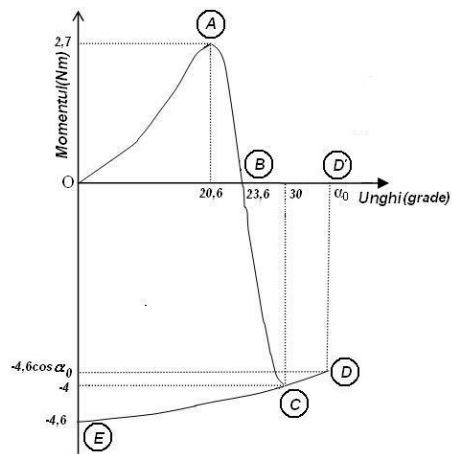


Figura 1.7

- Când – datorită înclinării – apa începe să curgă din căuș momentul începe să scadă – situație reprezentată prin partea AB a graficului din Figura 1.7.
- După ce la unghiul $\beta = 23,6^\circ$ momentul total devine nul – punctul B în imagine - balansoarul continuă să se rotească datorită inerției până când apa din căuș curge în întregime situație prezentată în punctul C. Pentru înclinația de 30° momentul care acționează asupra balansoarului are valoarea dată de (1.51)
- Ținând seama de descrierea funcționării pivei așa cum este făcută în enunț, balansoarul va continua să se miște în sensul măririi unghiului de înclinare până la atingerea unei înclinări maxime, α_0 - punctul D în imagine. În această poziție momentul care acționează asupra balansoarului va fi $\mu(\alpha_0) = M \cdot g \cdot TG \cdot \cos \alpha_0$
- Ulterior, unghiul de înclinare începe să scadă și balansoarul evoluează spre orizontală sub acțiunea momentului datorat greutatei proprii.
- Când se atinge din nou orizontală, momentul care acționează asupra balansoarului este momentul datorat greutatei proprii $\mu(0) = M \cdot g \cdot TG = 4,62 N \cdot m$ - punctul E în imagine.

Descrierea analitică a fiecărei porțiuni din grafic nu se poate face fără cunoașterea tuturor caracteristicilor pivei. În continuare va fi prezentată o descriere analitică a evoluției momentului care acționează asupra balansoarului pentru cele trei zone distincte ale evoluției - ca funcție de înclinare:

- Zona de înclinări în care apa se mișcă în căuș fără să curgă
- Zona de înclinări în care apa curge din căuș
- Zona de înclinări în care balansoarul se mișcă având căușul gol

Prima parte a mișcării balansoarului, aceea în care apa ocupă un volum cu secțiunea

paralelipipedică este – practic – neimportantă deoarece grosimea c a stratului de apă la începerea rotirii este foarte mică. Astfel, deoarece stratul de apă din căuș este foarte subțire, la înclinarea balanșoarului, se ajunge rapid la situația în care secțiunea volumului de apă cu un plan perpendicular pe axa de rotire este triunghiulară. Pentru descrierea situației se poate folosi un sistem de referință cu axa Ox conținută în planul bazei căușului și cu axa Oy trecând prin axul de rotire al balanșoarului.

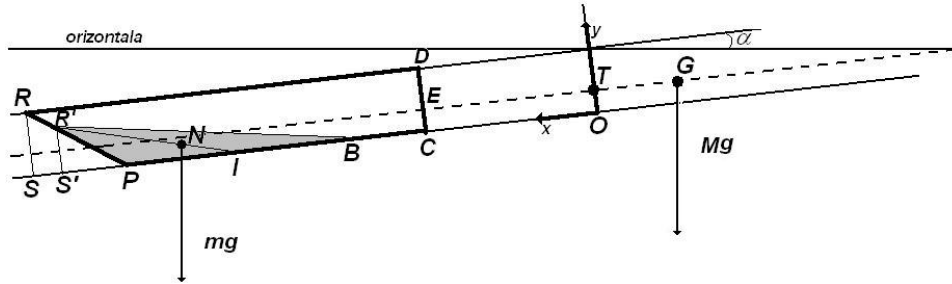


Figura 1.8

Conform enunțului

$$\begin{cases} RD = SC = L = 0,7400 \text{ m} \\ DC = RS = h = 0,1200 \text{ m} \\ ET = a = 0,2000 \text{ m} \\ \angle DRP = \gamma = 30^\circ \\ DE = h' = 0,0800 \text{ m} \end{cases} \quad (1.52)$$

Din calculele deja efectuate

$$\begin{cases} SP = RS \cdot \text{ctg} \gamma = 0,12 \cdot \sqrt{3} = 0,2078 \text{ m} \\ PC = d = 0,5322 \text{ m} \\ TG = 0,0157 \text{ m} \end{cases} \quad (1.53)$$

Volumul de apă din căuș este – de la începutul rotirii balanșoarului și până când apa începe să curgă din căuș – $V = m / \rho_{\text{apă}} = 0,001 \text{ m}^3$ iar aria secțiunii triunghiulare a volumului ocupat de apă este $S = V / b = 0,0066 \text{ m}^2$. Folosind notația

$$PB = x$$

rezultă că

$$\begin{cases} x \cdot R' S' = 2 \cdot S \\ R' S' = 0,0133 / x \\ S' P = R' S' \cdot \text{ctg} \gamma = 0,0231 / x \end{cases} \quad (1.54)$$

Situația în care apa începe să curgă din căuș este aceea în care

$$R'S' \equiv RS \quad (1.55)$$

Domeniul de valori pentru x în care analiza care urmează este adecvată este

$$\begin{cases} (0,0133/RS) < x < d \\ 0,1108 < x < 0,5322 \end{cases} \quad (1.56)$$

Deoarece

$$\forall R'BS' = \alpha \quad (1.57)$$

se poate scrie că

$$\begin{cases} tg\alpha = \frac{R'S'}{S'P + PB} \\ tg\alpha = \frac{0,0133}{0,0231 + x^2} \end{cases} \quad (1.58)$$

Cu valorile admisibile pentru x din rezultă că

$$\begin{cases} 0,0434 < tg\alpha < 0,3759 \\ 2,48^\circ < \alpha < 20,6^\circ \end{cases} \quad (1.59)$$

Ca funcție de α , x se scrie – conform (1.58) - sub forma

$$x = \sqrt{0,0133 \cdot ctg\alpha - 0,0231} \quad (1.60)$$

Dacă I este piciorul medianei din R' a triunghiului $\Delta R'PB$ coordonatele sale în sistemul de coordonate ales sunt

$$\begin{cases} x_I = OC + CP - PI = a + d - x/2 = 0,7322 - x/2 \\ y_I = 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

iar coordonatele punctului R' sunt

$$\begin{cases} x_{R'} = OC + CP + S'P = a + d + 0,0231/x = 0,7322 + 0,0231/x \\ y_{R'} = S'R' = 0,0133/x \end{cases} \quad (1.62)$$

Coordonatele centrului de greutate N al apei (situat pe mediană, la $2/3$ de vârf și o treime de bază) respectă relațiile

$$\frac{x_N - x_I}{x_{R'} - x_I} = \frac{y_N - y_I}{y_{R'} - y_I} = \frac{1}{3} \quad (1.63)$$

și au expresiile

$$\begin{cases} x_N = (x_{R'} - x_I)/3 + x_I = 0,7322 - \frac{x}{3} + \frac{0,0077}{x} \\ y_N = y_{R'}/3 = 0,0044/x \end{cases} \quad (1.64)$$

Proiecția axului de rotație T are coordonatele

$$\begin{cases} x_T = 0 \\ y_T = 0,0400 \end{cases} \quad (1.65)$$

În sistemul de coordonate considerat vectorul de poziție al centrului de greutate N al apei este

$$\overrightarrow{TN} = \left(0,7322 - \frac{x}{3} + \frac{0,0077}{x} \right) \cdot \vec{i} + (0,0044/x - 0,0400) \cdot \vec{j} \quad (1.66)$$

În același sistem forța de greutate a apei se scrie

$$\overrightarrow{m \cdot g} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \vec{j} \quad (1.67)$$

Momentul greutatei apei este

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mu_{mg}} = \overrightarrow{TN} \times \overrightarrow{mg} \\ \mu_{mg} = -m \cdot g \cdot \left[\left(0,7322 - \frac{x}{3} + \frac{0,0077}{x} \right) \cdot \cos \alpha + (0,0044/x - 0,0400) \cdot \sin \alpha \right] \cdot \vec{k} \\ \mu_{mg} = 9,81 \cdot \left(0,7322 - \frac{\sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231}}{3} + \frac{0,0077}{\sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231}} \right) \cdot \cos \alpha \\ \quad + 9,81 \cdot (0,0044/\sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231} - 0,0400) \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (1.68)^*$$

Momentul greutatei Mg a balansoarului determină momentul

$$\begin{cases} \mu_{MG} = -Mg \cdot TG \cdot \cos \alpha \\ \mu_{MG} = -4,6205 \cos \alpha \end{cases} \quad (1.69)$$

Momentul total care acționează asupra balansoarului pentru înclinări în domeniul

$$2,48^\circ < \alpha < 20,6^\circ \quad (1.70)$$

este

$$\begin{aligned}\mu(\alpha) &= \mu_{mg} + \mu_{Mg} \\ \mu(\alpha) &= 9,81 \cdot \left(0,2612 - \frac{\sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231}}{3} + \frac{0,0077}{\sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231}} \right) \cdot \cos \alpha \\ &\quad + 9,81 \cdot (0,0044 / \sqrt{0,0133 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,0231} - 0,0400) \cdot \sin \alpha\end{aligned}\quad (1.71)$$

Formula aproximativă (1.72) obținută prin rotunjirea numerelor din expresia (1.71)

$$\mu(\alpha) = 9,81 \cdot \left[\left(0,26 - \frac{\sqrt{0,01 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,02}}{3} + \frac{0,01}{\sqrt{0,01 \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 0,02}} \right) \cdot \cos \alpha - 0,04 \cdot \sin \alpha \right] \quad (1.72)$$

poate fi folosită pentru schițarea unei dependențe a momentului de unghi în domeniul $2,48^\circ < \alpha < 20,6^\circ$

Respectiva dependență este prezentată în figura 1.9.

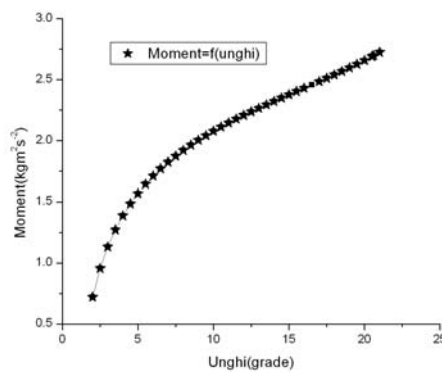


Figura 1.9

Pentru determinarea dependenței momentului care acționează asupra balansoarului de unghiul de înclinare al balansoarului față de orizontală după ce lichidul din căuș începe să curgă, se pot reface corespunzător calculele deja efectuate la punctul C1.c.. Astfel, folosind desenul din figura 1.10, cu notația

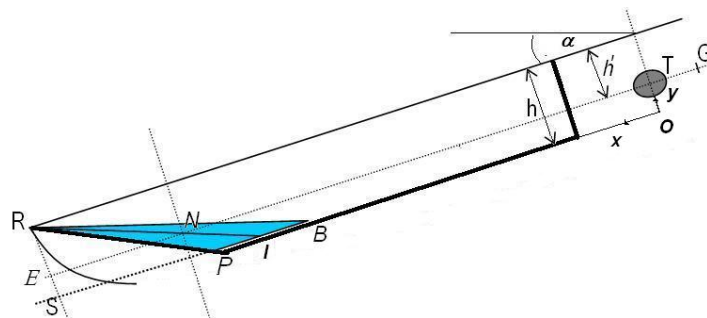


Figura 1.10

$PB = x$, masa de apă din căuș este

$$m_1 = \frac{x \cdot h \cdot b}{2} \cdot \rho_{\text{apă}} \quad (1.73)$$

Domeniul de valori pentru x avut în vedere este

$$0 < x < 0,1108 \quad (1.74)$$

Deoarece

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{RS}{SP + x} = \frac{h}{x + h \cdot \operatorname{ctg} \gamma} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,12}{x + 0,12 \cdot \sqrt{3}} \cong \frac{0,1200}{x + 0,2078} \end{cases} \quad (1.75)$$

domeniul de valori ale unghiului de înclinare a balansoarului este determinat de

$$\begin{cases} 0,3766 < \operatorname{tg} \alpha < 0,5774 \\ 20,6^\circ < \alpha < 30^\circ \end{cases} \quad (1.76)$$

Din relația (1.75) rezultă și

$$\begin{cases} x = h \cdot (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \gamma) \\ x = 0,1200(\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}) \end{cases} \quad (1.77)$$

Secțiunea perpendiculară pe axul de rotație a apei din căuș este triunghiul PBR . Centrul de masă N al apei este localizat la două treimi de vârful R pe mediana RA . Deoarece înălțimea căușului este $h = 0,12 \text{ m}$ rezultă că, din motive de asemănare, N se află la $2h/3$ de fața de sus a căușului adică la $h' = 0,08 \text{ m}$. Deoarece conform desenului din figura 1.9 centrul de greutate al balansoarului și axul de rotație se află de asemenea la distanța $h' = 0,08 \text{ m}$ de fața de sus a balansoarului, rezultă că punctele N, T, G sunt coliniare.

În triunghiul RSI $SP = h \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ și deci

$$SI = SP + PI = x/2 + h \cdot \operatorname{ctg} \gamma \quad (1.78)$$

În concluzie

$$EN = \frac{2}{3} \cdot SI = \frac{2}{3} \cdot (x/2 + h \cdot \operatorname{ctg} \gamma) \quad (1.79)$$

și deci

$$TN = L + a - \frac{2}{3} \cdot (x/2 + h \cdot \operatorname{ctg} \gamma) \quad (1.80)$$

sau

$$\begin{cases} TN = 0,74 + 0,20 - \frac{2}{3} \cdot (x/2 + 0,12 \cdot \sqrt{3}) \\ TN = -\frac{x}{3} + 0,8014 \end{cases} \quad (1.81)$$

Conform relației (1.73)

$$\begin{cases} m_1 = \frac{x \cdot 0,12 \cdot 0,15}{2} \cdot 1000 \\ m_1 = 9x \end{cases} \quad (1.82)$$

Așa cum a fost deja calculat

$$M \cdot g \cdot |TG| \cong 30 \cdot 9,81 \cdot 0,0157 = 4,6205 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cong 4,62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \quad (1.83)$$

Momentul total care acționează asupra balansoarului este

$$\overline{\mu(\alpha)} = (\overline{m_1 g}) \times \overline{TN} + (\overline{Mg}) \times \overline{TG} \quad (1.84)$$

$$\mu(\alpha) = m_1 \cdot g \cdot |TN| \cdot \cos \alpha - M \cdot |TG| \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (1.85)$$

$$\begin{cases} \mu(x, \alpha) = 9,81 \left(9x \cdot \left(0,8014 - \frac{x}{3} \right) - 0,4710 \right) \cdot \cos \alpha \\ \mu(\alpha) = 9,81 \{ 1,0814 (ctg \alpha - \sqrt{3}) \cdot [0,8014 - 0,04 (ctg \alpha - \sqrt{3})] - 0,4710 \} \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (1.86)$$

Reprezentarea grafică a dependenței (1.86) în domeniul $20,6^\circ < \alpha < 30^\circ$ în care apa curge din căuș este prezentată în figura 1.11

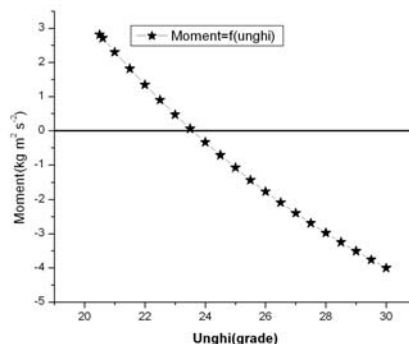


Figura 1.11

În capetele domeniului momentul are valorile

$$\begin{cases} \mu(20,6^\circ) \cong 2,7 \text{ N} \cdot \text{m} \\ \mu(30^\circ) \cong -4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases} \quad (1.87)$$

Momentul datorat greutății proprii a balanșoarului (care acționează asupra balanșoarului atunci când căușul este goală) are – pentru balanșoarul în poziție orizontală - valoarea (1.83)

$$\mu_{Mg} = 4,62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

În tabelul 1.2 sunt cumulate valorile calculate ale momentului care acționează asupra balanșoarului ca funcție de unghiul de înclinare față de orizontală al acestuia

Tabelul 1.2

Nr	Unghi	Moment	Nr	Unghi	Moment	Nr	Unghi	Moment
1.	2	0.72115	22.	12.5	2.2361	1.	20.5	2.81567
2.	2.5	0.95524	23.	13	2.26502	2.	20.6	2.71176
3.	3	1.13169	24.	13.5	2.29329	3.	21	2.30516
4.	3.5	1.27173	25.	14	2.32105	4.	21.5	1.81648
5.	4	1.38702	26.	14.5	2.34839	5.	22	1.34849
6.	4.5	1.48455	27.	15	2.37545	6.	22.5	0.90014
7.	5	1.56884	28.	15.5	2.40234	7.	23	0.47045
8.	5.5	1.64293	29.	16	2.42916	8.	23.5	0.05851
9.	6	1.70898	30.	16.5	2.45604	9.	24	-0.33653
10.	6.5	1.76855	31.	17	2.48309	10.	24.5	-0.71547
11.	7	1.82282	32.	17.5	2.51045	11.	25	-1.07903
12.	7.5	1.87269	33.	18	2.53824	12.	25.5	-1.42791
13.	8	1.91888	34.	18.5	2.56662	13.	26	-1.76276
14.	8.5	1.96194	35.	19	2.59574	14.	26.5	-2.08418
15.	9	2.00234	36.	19.5	2.62578	15.	27	-2.39274
16.	9.5	2.04046	37.	20	2.65696	16.	27.5	-2.68896
17.	10	2.07661	38.	20.5	2.6895	17.	28	-2.97334
18.	10.5	2.11106	39.	20.6	2.6962	18.	28.5	-3.24636
19.	11	2.14404	40.	21	2.72369	19.	29	-3.50845
20.	11.5	2.17576	41.			20.	29.5	-3.76003
21.	12	2.20639	42.			21.	30	-4.00148

Reprezentarea grafică a datelor cumulate (și racordate) din cele două domenii este prezentată în figura 1.11

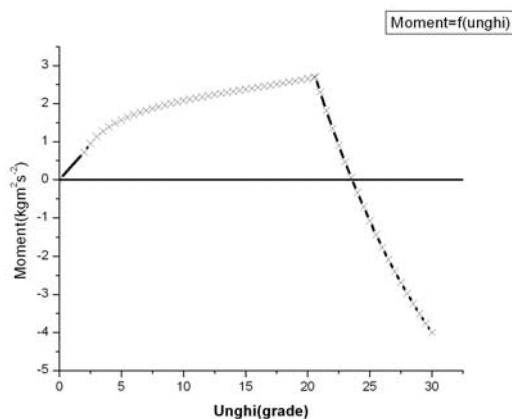


Figura 1.12

Așa cum se poate observa atât din Figura 1.11 cât și din Figura 1.12 momentul se anulează pentru unghiul $\beta = 23,6^\circ$ - unghi determinat anterior la punctul A.1.c.

În porțiunea a treia a evoluției - aceea în care căușul este complet gol –momentul care acționează asupra balansoarului este momentul greutateii proprii care are expresia

$$\begin{cases} \mu(\alpha) = -M \cdot g \cdot TG \cdot \cos \alpha \\ \mu(\alpha) = -4,62 \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (1.88)$$

Cu căușul gol balansoarul își mărește înclinarea pentru un mic interval de unghiuri după care evoluează către orizontală.

Reprezentarea grafică a momentului ca funcție de înclinare – pentru balansoarul cu căușul gol este prezentată în figura 1.13

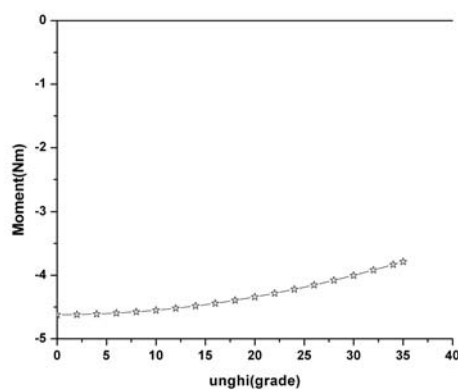


Figura 1.13

Completat cu noua porțiune, graficul 1.12. al evoluției momentului ca funcție de înclinare este prezentat în figura 1.14.

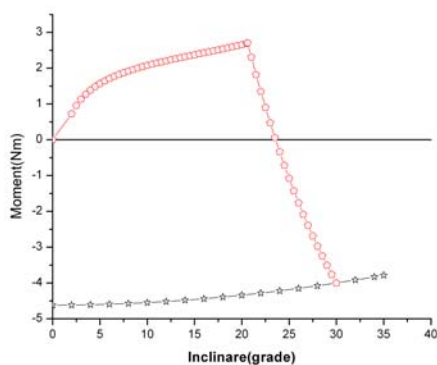


Figura 1.14

Deși nu corespunde în detalii graficului din Figura 1.14., graficul calitativ din Figura 1.7. permite descrierea corectă a dependenței momentului de înclinare.

1.A.2.b Interpretarea geometrică a energiei date de momentul total al greutateii și a lucrului mecanic transferat băătorului

Folosind graficul trasat la punctul se poate determina valoarea energiei totale W_{total} produsă de $\mu(\alpha)$ și se poate găsi lucrul mecanic W_{lovire} care este transferat de la băător la orez.

Dacă se notează cu ℓ brațul forței de greutate F_g și cu $(\delta\ell)$ deplasarea infinitezimală a punctului de aplicație al acestei forțe, produsul $\mu(\alpha) \cdot d\alpha$ dintre momentul forței de greutate și rotirea infinitezimală $d\alpha$ se poate rescrie ca

$$\mu(\alpha) \cdot d\alpha = F_g \cdot \ell \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = F_g \cdot (\delta\ell) \cdot \cos \alpha = dL \quad (1.89)$$

Evident, $\mu(\alpha) \cdot d\alpha$, este lucrul mecanic dL efectuat de momentul $\mu(\alpha)$ la o rotire infinitezimală $d\alpha$

Lucrul mecanic L_{total} preluat de balansoar în cursul unui ciclu OABCDCEO efectuat de balansoar este aria suprafeței delimitată de „linia” dependenței $\mu(\alpha)$. Trebuie avut în vedere că aria este pozitivă dacă este parcursă de la stânga la dreapta în cadranul 1 sau de la dreapta la stânga în cadranul 4. Deoarece lucrul mecanic produs de partea din momentul total datorată acțiunii momentului greutateii balansoarului fără apă este egal cu variația energiei potențiale gravitaționale a balansoarului, lucrul mecanic L_{total} este egal cu variația energiei cinetice a balansoarului.

$$L_{total} = \oint \mu(\alpha) \cdot d\alpha \quad (1.90)$$

Renunțând la porțiunea CDC care (deoarece este parcursă înainte și înapoi) aduce o contribuție nulă, aria care trebuie considerată pentru calculul L_{total} este aceea delimitată de „linia” OABCEO din Figura 1.7.

Energia pe care balansoarul o transferă pivei este egală cu lucrul mecanic pe care balansoarul îl capătă de la câmpul gravitațional datorită acțiunii momentului greutatei proprii când se mișcă între poziția de înclinare α_0 și orizontală. Pe porțiunea respectivă

$$\mu(\alpha) = \mu_{Mg}(\alpha) = M \cdot g \cdot TG \cdot \cos \alpha \quad (1.91)$$

și câștigul de energie al balansoarului care va fi transferat ca lucru mecanic efectuat asupra orezului din mojar este

$$\begin{cases} L_{DCE} = - \int_{\alpha_0}^0 M \cdot g \cdot TG \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = -MgTG \sin \alpha \Big|_{\alpha_0}^0 = M \cdot g \cdot TG \cdot \sin \alpha_0 \\ L_{DCE} \cong 4,62 \cdot \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (1.92)$$

1.A.2.c Estimarea unghiului maxim de înclinare a băătorului

Graficul momentului μ ca funcție de α (din Figura 1.7) permite estimarea unghiului maxim de înclinare α_0 și implicit a valorii energiei acumulate de balansoar W_{lovire} (trebuie avută în vedere că variația energiei cinetice datorată apei care curge în căuș și afară din căuș este neglijabilă – conform presupunerii din enunț). Se pot înlocui porțiunile curbe ale dependenței $\mu(\alpha)$ din Figura 1.7. prin linii în zigzag dacă aceasta simplifică operațiile de calcul – permisiune acordată din enunț.

Estimarea mărimii unghiului α_0 - înclinarea maximă atinsă de balansoar în mișcarea din inerție după golirea căușului - pleacă de la observația că în punctul D energia cinetică a balansoarului este nulă. Considerând că lucrul mecanic efectuat de momentul pozitiv în evoluția OAB este ulterior consumat de lucrul mecanic efectuat de momentul rezistiv în evoluția BCD se poate scrie că

$$Aria(OABO) = Aria(BD' DC) \quad (1.93)$$

Asimilând figura $OABO$ cu un triunghi,

$$Aria(OABO) = 23,6^\circ \times 2,7 / 2 \cong 31,86 \quad (1.94)$$

Asimilând figura $BD' DC$ cu un trapez cu bazele BD' și CD

$$Aria(BD' DC) = 4 \times [(\alpha_0 - 23,6) + (\alpha_0 - 30)] / 2 = 4\alpha_0 - 107,2 \quad (1.95)$$

Pentru corectitudine dimensională, ariile din (1.93) ar trebui calculate cu unghiurile măsurate în radiani. De exemplu, lucrul mecanic reprezentat de $Aria(OABO)$ este de fapt

$$Aria(OABO) = 23,6^\circ \times \pi \times 2,7 / 360 \cong 0,56J \quad (1.96)$$

Din (1.93) rezultă

$$\alpha_0 = 34,7^\circ \quad (1.97)$$

Tot lucrul mecanic datorat acțiunii momentului greutatei proprii în mișcarea *DCE* este transferată în decorticarea orezului.

Lucrul mecanic transferat operației de decorticare $W_{decorticare}$ este deci

$$\begin{cases} W_{decorticare} = \text{Aria}(OD' DCE) \\ W_{decorticare} = - \int_{34,7}^0 Mg \times TG \times \cos \alpha d\alpha = Mg \times TG \times \sin 34,7 \\ W_{decorticare} = 4,62 \times \sin 34,7 = 2,63 \text{ Joule} \end{cases} \quad (1.98)$$

1.A.3 .Determinarea parametrilor de funcționare pentru situația în care balansoarul se află într-o poziție din jurul poziției de echilibru

1.A.3.a Graficul momentului greutatei pentru $\alpha \cong \beta$ și stabilirea naturii poziției de echilibru

În această parte a analizei funcționării pivei, se presupune că apa „dă pe-afară” - curge din căușul aflată în poziția de echilibru. Se consideră că apa curge în căuș cu un debit constant Φ dar că nu se poate neglija cantitatea de apă care curge în căuș în cursul mișcării balansoarului. Așa cum s-a găsit deja, în cursul înclinării balansoarului există o situație în care momentul total care acționează asupra balansoarului este nul. Această situație apare atunci când cantitatea de apă din căuș este $m_1 = 0,61kg$ iar înclinarea balansoarului este dată de unghiul $\beta \cong 23,26^\circ$. În zona de unghiuri $20,6^\circ < \alpha < 30^\circ$ (corespunzând domeniului de valori ale lungimii porțiunii acoperite cu apă pe partea de jos a căușului $0 < x < 0,1108$) momentul total al greutateilor care acționează asupra balansoarului are expresia

$$\mu(x, \alpha) = 9,8100 \left(9x \cdot \left(0,8014 - \frac{x}{3} \right) - 0,4710 \right) \cdot \cos \alpha \quad (1.99)$$

În figura de mai jos este desenată reprezentarea grafică a dependenței (1.99) în domeniul centrat pe valoarea $\beta \cong 23,6^\circ$ pentru care momentul care acționează asupra balansoarului este nul.

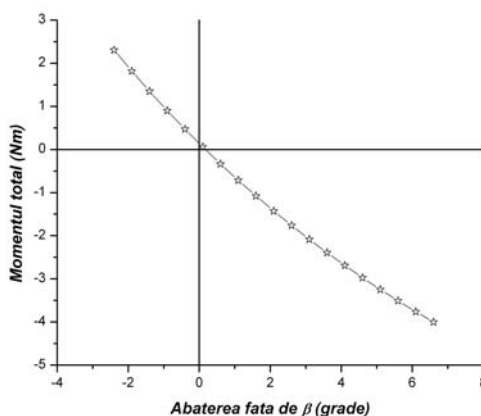


Figura 1.15

Dacă balansoarul ajunge cu viteză nulă în poziția în care are înclinarea β el va rămâne în această poziție – care este o poziție de echilibru stabil. La o mică înclinare în sensul scăderii unghiului cantitatea de apă din căuș poate crește și prin urmare balansoarul revine către poziția de înclinare β ; dacă se produce o mică înclinare a balansoarului în sensul creșterii unghiului de înclinare, căușul pierde o parte din apa conținută, și momentul determinat de greutatea apei scade producându-se din nou revenirea la înclinarea β . Graficul din figura 1.15. descrie sintetic acest fapt. Așa cum se poate vedea, momentul este pozitiv pentru abateri unghiulare negative față de β și negativ pentru abateri pozitive față de β . La scoaterea din poziția de echilibru sistemul are tendința de a reveni către această poziție. Starea de echilibru este una de echilibru stabil.

1.A.3.b *Dependența analitică momentului greutății de înclinarea balansoarului în jurul poziției de echilibru*

Dependența momentului care acționează asupra balansoarului de unghiul de înclinare al balansoarului față de orizontală pentru poziții reprezentând o mică abatere $\Delta\alpha$ față de β se poate obține rescriind expresia (1.86) pentru

$$\alpha = \beta + \Delta\alpha \quad (1.100)$$

Cu notația $PB = x$, masa de apă din căuș este conform relației (1.73) $m_1 = x \cdot h \cdot b \cdot \rho_{apa} / 2$

Lungimea zonei atinse de apă, $x(\alpha) = h(ctg\alpha - ctg\gamma) = h(ctg(\beta + \Delta\alpha) - ctg\gamma)$ are pentru unghiul β , expresia $x(\beta) = h(ctg\beta - ctg\gamma)$.

La creșterea unghiului de la valoarea β la valoarea $\beta + \Delta\alpha$ masa de apă din căuș scade cu Δm

$$\begin{cases} \Delta m = m_1(\beta + \Delta\alpha) - m_1(\beta) = h \cdot b \cdot \rho_{apa} \cdot (x(\beta + \Delta\alpha) - x(\beta)) / 2 \\ \Delta m = h \cdot b \cdot \rho_{apa} \cdot h \cdot (ctg(\beta + \Delta\alpha) - ctg(\beta)) / 2 \\ \Delta m = -h \cdot b \cdot \rho_{apa} \cdot h \cdot \frac{\sin(\Delta\alpha)}{2 \cdot \sin(\beta + \Delta\alpha) \cdot \sin(\beta)} \cong -h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa} \frac{\Delta\alpha}{2 \cdot \sin^2(\beta)} \end{cases} \quad (1.101)$$

Deoarece pentru poziția de echilibru momentul total se poate considera că momentul care acționează asupra balansoarului la o mică înclinare față de poziția de echilibru este chiar momentul determinat de deficitul de apă din căuș Δm .

Ținând seama de relația (1.80), variația distanței de la ax la centrul de greutate al apei din căuș la creșterea unghiului de la valoarea β la valoarea $\beta + \Delta\alpha$ este

$$\begin{cases} \Delta(TN) = -\frac{1}{3} \cdot (x(\beta + \Delta\alpha) - x(\beta)) \\ \Delta(TN) = -\frac{h}{3} \cdot (ctg(\beta + \Delta\alpha) - ctg(\beta)) \\ \Delta(TN) = \frac{h}{3} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\sin^2(\beta)} \end{cases} \quad (1.102)$$

Cum pentru unghiul β distanța de la ax la centrul de masă al apei din căuș este

$$TN(\beta) = L + a - \frac{h}{3}(ctg\beta + ctg\gamma) \quad (1.103)$$

variația lungimii acestei distanțe la trecere de la unghiul β la unghiul $\beta + \Delta\alpha$ este nesemnificativă față de lungimea distanței astfel că se poate considera că la înclinarea β sau $\beta + \Delta\alpha$ lungimea distanței este aceea dată de relația (1.103).

Momentul care acționează asupra balansoarului înclinat cu $\Delta\alpha$ față de β are expresia

$$\begin{cases} \mu(\beta + \Delta\alpha) = \Delta m \cdot TN(\beta) \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha) \cdot g \\ \mu(\beta + \Delta\alpha) = -h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa} \frac{g \cdot \Delta\alpha}{2 \cdot \sin^2(\beta)} \left(L + a - \frac{h}{3}(ctg\beta + ctg\gamma) \right) \cos(\beta + \Delta\alpha) \\ \mu(\beta + \Delta\alpha) \cong -h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa} \frac{\Delta\alpha}{2 \cdot \sin^2(\beta)} \cdot \left(L + a - \frac{h}{3}(ctg\beta + ctg\gamma) \right) \cdot \cos(\beta) \cdot g \end{cases} \quad (1.104)$$

Numeric,

$$\begin{cases} \mu(23,26 + \Delta\alpha) \cong -0,12^2 \cdot 1,5 \cdot 981 \frac{\Delta\alpha \cdot \cos(23,26)}{2 \cdot \sin^2(23,26)} (0,94 - 0,04(ctg 23,26 + \sqrt{3})) \\ \mu(23,26 + \Delta\alpha) = -48,4719 \cdot \Delta\alpha \text{ N} \cdot m \cong -48 \cdot \Delta\alpha \text{ N} \cdot m \end{cases} \quad (1.105)$$

1.A.3.c . Ecuația de mișcare a balansoarului este

$$\mu = J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (1.106)$$

unde momentul μ are expresia dată de (1.105) iar momentul de inerție J este suma dintre momentul de inerție propriu balansoarului J_b și momentul de inerție al apei din căuș J_c . Evident, momentul de inerție al apei din căuș depinde de unghiul de înclinare dar, pentru înclinări foarte mici față de poziția de echilibru determinată de unghiul de înclinare β ale balansoarului se poate considera în mod rezonabil că atât cantitatea cât și forma apei din căuș nu se modifică și că momentul de inerție rămâne constant și egal cu valoarea corespunzătoare unghiului de înclinare de echilibru β pentru un punct material (cu masa egală cu masa de apă) aflat la distanța NT de axul de rotire.

Momentul de inerție al balansoarului cu căușul conținând apă este

$$\begin{cases} J = J_b + J_c = J_b + m_1(\beta) \cdot (TN(\beta))^2 \\ J \cong 12 + 0,61 \times 0,7766^2 \cong 12,37 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases} \quad (1.107)$$

Deoarece

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2(\beta + \Delta\alpha)}{dt^2} = \frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} \quad (1.108)$$

ecuația (1.106) se poate rescrie ca

$$\mu = J \cdot \frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} \quad (1.109)$$

și ținând seama de (1.105), (1.107) și (1.109)

$$\begin{cases} -48 \cdot \Delta\alpha = 12,37 \cdot \frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} \\ \frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} + \frac{48}{12,37} \Delta\alpha = 0 \end{cases} \quad (1.110)^*$$

Ecuația (1.110) este o ecuație de oscilație pentru mărimea $\Delta\alpha$. Pulsția ω a oscilației are valoarea

$$\omega = \sqrt{\frac{48}{12,37}} \text{ s}^{-1} \quad (1.111)$$

iar perioada τ a oscilației este

$$\begin{cases} \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{12,37}{48}} \text{ s} \\ \tau \cong 3,19 \text{ s} \end{cases} \quad (1.112)^*$$

1.A.3.d Oscilația armonică a balansoarului în jurul poziției de echilibru ($\alpha = \beta$) când căușul „dă pe-afară”

Putem presupune că balansoarul oscilează cu amplitudinea $\Delta\alpha_0$ în jurul poziției de echilibru ($\alpha = \beta$); la momentul inițial $t = 0$ balansoarul este în poziția de echilibru $\Delta\alpha = 0$ iar la momentul ulterior balansoarul se mișcă astfel încât căușul se ridică și unghiul α de înclinare a balansoarului scade, $d\alpha < 0$ astfel încât pentru ca căușul „să dea pe-afară” este necesar ca în căuș să se adauge apă. Ecuația de mișcare a balansoarului este :

$$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \cdot \sin(2\pi \cdot t/\tau) \quad (1.113)$$

iar viteza de variație a abaterii unghiului de înclinare are expresia

$$\frac{d(\Delta\alpha)}{dt} = -\Delta\alpha_0 \cdot 2\pi/\tau \cdot \cos(2\pi \cdot t/\tau) \quad (1.114)$$

Deoarece variația abaterii unghiului față de echilibru este identică variației înclinării

$$\frac{d(\alpha)}{dt} = -\Delta\alpha_0 \cdot 2\pi/\tau \cdot \cos(2\pi \cdot t/\tau) \quad (1.115)$$

Pentru ca apa să dea pe-afară din căuș trebuie adăugată o cantitate care, conform relației (1.101) este

$$dm = -\frac{h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa}}{2 \cdot \sin^2(\beta)} d\alpha \quad (1.116)$$

sau, ținând seama de (1.115)

$$dm = \Delta\alpha_0 \cdot \frac{\pi \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa}}{\tau \cdot \sin^2(\beta)} \cdot \cos(2\pi \cdot t/\tau) \cdot dt \quad (1.117)$$

Cantitatea de apă care trebuie adăugată depinde de timp. dm este maximă la momentul inițial $t = 0$. Valoarea corespunzătoare este

$$dm(t=0) = dm_0 = \Delta\alpha_0 \cdot \frac{\pi \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa}}{\tau \cdot \sin^2(\beta)} \cdot dt \quad (1.118)$$

Debitul Φ apei care trebuie „să vină” în căuș în momentul inițial este

$$\Phi = dm_0/dt = \Delta\alpha_0 \cdot \frac{\pi \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa}}{\tau \cdot \sin^2(\beta)} \quad (1.119)$$

Dacă ulterior debitul este mai mare decât cel necesar căușul „dă pe-afară” pur și simplu. Cererea ca oscilația să aibă amplitudinea de $\Delta\alpha = 1^\circ = (\pi/180) \text{ radiani}$ conduce pentru debit la expresia

$$\Phi(1^\circ) = \Phi_1 = \frac{\pi^2 \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho_{apa}}{180 \cdot \tau \cdot \sin^2(\beta)} \quad (1.120)$$

Valoarea numerică a debitului pentru asigurarea oscilației cu amplitudinea de 1° este

$$\Phi_1 = \frac{\pi^2 \cdot 0,12^2 \cdot 0,15 \cdot 1000}{180 \cdot 3,19 \cdot \sin^2(23,26)} \cong 0,2380 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cong 0,23 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.121)^*$$

1.A.3.e Determinarea debitului Φ_2 pentru care puiua nu mai funcționează

Așa cum s-a arătat, când înclinarea balansoarului atinge $\alpha_1 = 20,6^\circ$ căușul care conține $m = 1 \text{ kg}$ de apă începe să dea pe-afară; când înclinarea ajunge la $\alpha_2 = 30^\circ$ apa din căuș curge în întregime. Poziția de echilibru în jurul căreia balansoarul oscilează este realizată pentru

înclinarea $\beta = 23,26^\circ$. Pentru ca mișcarea să rămână oscilatorie trebuie asigurat un debit care să determine cel mult o amplitudine $\Delta\alpha_0$

$$\Delta\alpha_0 = 23,6^\circ - 20,6^\circ = 3^\circ \quad (1.122)$$

Pentru realizarea unei amplitudini de 3° este necesară asigurarea unui debit de trei ori mai mare decât pentru asigurarea unei amplitudini de 1° .

Valoarea cerută a debitului este

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 3 \cdot \Phi_1 \\ \Phi_2 &= 3 \times 0,23 = 0,69 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.123)$$