

CONCURSUL „VRÂNCEANU-PROCOPIU”
Bacău 14-16 noiembrie 2008

Proba de Baraj la Fizică

Problema de Optică (O prismă mai puțin uzuală)

Secțiunea principală a unei prisme de sticlă are formă de romb, cu unghiul $BAD = \text{unghiul } BCD = \theta$. Un fascicul subțire, de lumină galbenă, ce se propagă spre prismă în planul secțiunii principale, pătrunde pe fața AB , direcția sa inițială fiind paralelă cu diagonala AC a rombului. El se reflectă total pe fețele AD și DC și apoi iese din prismă prin fața BC . Pentru respectiva radiație galbenă, indicele de refracție al prisme este $n=1,60$ iar pentru aerul exterior $n'=1$.

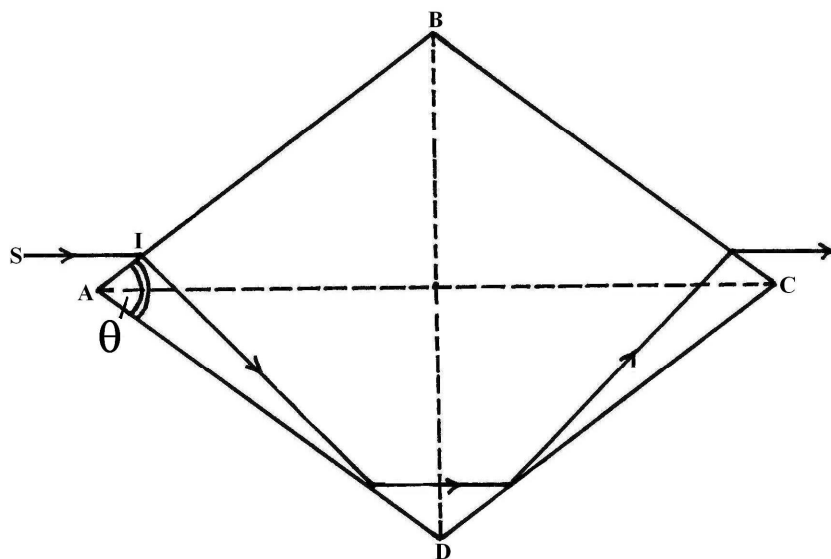
1). Pentru ce valoare a unghiului θ (exprimată analitic în funcție de n) poate fi egală cu zero deviația totală a fasciculului de lumină care iese din prismă? Calculați apoi valoarea lui θ în grade și minute când $n=1,60$.

2). Prisma și direcția fasciculului incident rămân fixe, însă se schimbă radiația luminoasă incidentă, ea fiind formată acum din dubletul galben al mercurului. Cele două lungimi

de undă au valorile $579,1 \text{ nm}$, respectiv 577 nm iar indicii de refracție ai sticlei prisme pentru aceste lungimi de undă sunt $n=1,60$, respectiv $n+\Delta n$, cu $\Delta n=1,3 \cdot 10^{-4}$. Razele de lumină ce ies din prismă pătrund longitudinal într-o lunetă reglată pentru infinit.

a). Exprimați „distanța unghiulară” ε dintre cele două imagini observate prin lunetă (mai întâi prin θ și Δn , apoi prin n și Δn);

b). Calculați distanța liniară y dintre cele două imagini observate în planul focal al obiectivului lunetei știind că distanța sa focală este $f_{ob}=40 \text{ cm}$.

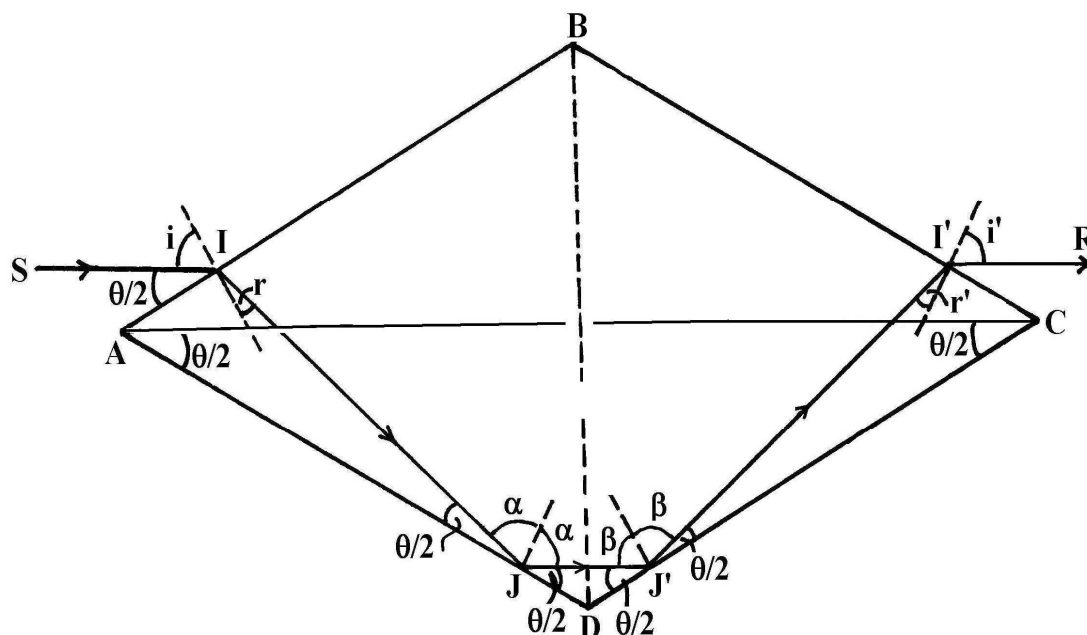


Problemă propusă de:
Prof.univ.dr. Uliu Florea,
Facultatea de Fizică
Universitatea din Craiova

CONCURSUL „VRÂNCEANU-PROCOPIU”
Bacău 14-16 noembrie 2008

Proba de Baraj la Fizică

Rezolvare și barem de evaluare pentru Problema de Optică (O prismă mai puțin uzuală)



- 1). (6 puncte) Deviația totală poate fi egală cu zero numai dacă raza I'R este paralelă cu raza SI. Aceasta înseamnă că $i' = i$ and $r' = r$ (traseu simetric prin interiorul prisme cu secțiune sub formă de romb).

Așadar $JJ' \parallel AC \parallel SI \parallel I'R$(1 punct)

Unghiul $J'D$ și unghiul $J'D$ sunt egale cu $\theta/2$. De asemenea, unghiurile AJI și $CJ'I'$ sunt egale cu $\theta/2$. În interiorul triunghiului AJI putem scrie $\theta + \pi/2 + r + \theta/2 = \pi$, astfel că $r = \pi/2 - 3\theta/2$. Pe de altă parte $i = \pi/2 - \theta/2$(1,5 puncte)

Legea cantitativă a refracției are forma $\sin(\pi/2 - \theta/2) = n \sin(\pi/2 - 3\theta/2)$, sau $\cos(\theta/2) = n \cos(3\theta/2)$(1,5 puncte)

Acum, puțină trigonometrie

$$\cos(3\theta/2) = \cos(\theta + \theta/2) = \cos \theta \cos(\theta/2) - \sin \theta \sin(\theta/2) =$$

$$= [2\cos^2(\theta/2) - 1]\cos(\theta/2) - 2\sin^2(\theta/2)\cos(\theta/2) = \dots = 4\cos^3(\theta/2) - 3\cos(\theta/2).$$

.....(1 punct)

Legea Snell-Descartes devine $\cos(\theta/2)[1 - n[4\cos^2(\theta/2) - 3]] = 0$. Solution $\theta = \pi$ (180°) nu poate fi acceptată din punct de vedere fizic. Soluția fizică este $\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{3n+1}{4n}} = 0.952$ (pentru $n=1.60$), adică $\theta = 35^\circ 39' 33''$ (1 punct)

2). (4 puncte)

a). (3,5 puncte). Avem un unghi de incidență fixat ($i=\text{constant}$) și două unghiuri de refracție r și $r+dr$, corespunzând lui n și $n+dn$. Din legea refracției $\sin i = n \sin r$, prin diferențiere putem scrie $0 = dn \sin r + n \cos r dr$. Pe de altă parte, din relația de la ieșire $\sin i' = n \sin r'$ putem scrie $\cos i' di' = dn \sin r' + n \cos r' dr'$. Deoarece dn (sau Δn -ca în enunțul problemei) este o cantitate foarte mică (infinitesimală), putem aproxima $i' \approx i$ and $r' \approx r$ but with $di' \neq di (=0)$ and $dr' \neq dr (\neq 0)$**(1 punct)**

Vom demonstra mai târziu că $dr' = -dr$ (vezi **Nota** de mai jos).

Acum vom determina unghiul dintre cele două raze de lumină emergente, anume $\varepsilon \equiv di'$. Obținem imediat

$$\varepsilon = \frac{\sin r}{\cos i} dn + n \frac{\cos r}{\cos i} (-dr) \quad \text{cu} \quad dr = -\text{tgr} \frac{dn}{n}.$$

Rezultatul final este,

$$\varepsilon = 2 \frac{\sin r}{\cos i} dn = 2 \left[\frac{\cos\left(3\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] dn. \dots\dots\dots \textbf{(1 punct)}$$

Cunoaștem deja expresia matematică a lui $\cos(\theta/2)$ și, după câteva calcule matematice, unghiul ε poate fi exprimat sub o altă formă, anume

$$\varepsilon = 2 \frac{dn}{n} \sqrt{\frac{3n+1}{n-1}} \dots\dots\dots \textbf{(1 punct)}$$

Numeric obținem : $\varepsilon = 0.51 \cdot 10^{-3}$ rad (1.7533 minute).

Notă: In triunghiul JDJ' scriem că suma unghiurilor interioare este π (radiani), anume $(\pi/2 - \alpha) + (\pi - \theta) + (\pi/2 - \beta) = \pi$, adică $\alpha + \beta = \pi - \theta = \text{constant}$ (pentru o prismă rombică dată, cu un unghi θ fixat). Așadar, $d\alpha = -d\beta$, unde $\alpha = \theta + r$ (vezi triunghiul AIJ) și $\beta = \theta + r'$ (vezi triunghiul CI'J'). Când unghiul θ este fixat (situația noastră) $d\alpha = dr$ și $d\beta = dr'$ astfel că $dr = -dr'$.

Q.E.D (Quod Erat Demonstrandum)!.....**(0,5 puncte)**

b). (0,5 puncte) $y = f_{ob} \text{tg} \varepsilon \approx \varepsilon f_{ob} = 2 \left(\frac{dn}{n} \right) f_{ob} \sqrt{\frac{3n+1}{n-1}}$. Numeric: $y = 0.20$ mm...**(0,5 puncte)**

TOTAL.....**10 (zece) puncte**

**CONCURSUL „VRÂNCEANU-PROCOPIU”
Bacău 14-16 noembrie 2008**

Proba de Baraj la Fizică

Rezolvare și barem de evaluare pentru Problema de Optică (O prismă mai puțin uzuală)

FOAIE DE RASPUNSURI

1). Expresia analitică (în funcție de indicele de refracție n) a unghiului θ al prisme care dă o deviație totală egală cu zero pentru raza incidentă SI este

Valoarea numerică a unghiului θ pentru $n = 1,60$ este

$\theta =$

2). a). Dependența $\varepsilon(\theta, \Delta n)$ are forma analitică

Dependența $\varepsilon(n, \Delta n)$ are forma analitică

Valoarea numerică a „distanței unghiulare” ε este

$\varepsilon =$

Distanța liniară y dintre cele două imagini observate în planul focal (expresie analitică și valoare numerică) este