

Clasa a IX-a

1. a) Arătați că orice număr întreg, multiplu de 6, este egal cu suma a 4 cuburi perfecte.

b) Arătați că orice număr întreg este egal cu suma a 5 cuburi perfecte.

Soluție. a) $6n = (n+1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3$ **3p**

b) $6n \pm 1 = 6n + (\pm 1)^3$ **2p**

$6n \pm 2 = 6(n \mp 1) + (\pm 2)^3$ **2p**

$6n + 3 = 6(n-4) + 3^3$ **2p**

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural și A o submulțime nevidă a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea: oricum am lua două elemente $x, y \in A$, dacă $x + y \leq n$, atunci $x + y \in A$.

Arătați că media aritmetică a elementelor lui A este cel puțin $\frac{1}{2}(n+1)$.

Soluție. Fie $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ elementele lui A . Arătăm că, pentru orice $k \in \overline{0, \lfloor \frac{1}{2}(m-1) \rfloor}$, $a_{k+1} + a_{m-k} \leq n+1$ **4p**

În primul rând, $a_1 + a_m \notin A$, deci $a_1 + a_m \geq n+1$ **2p**

Apoi, dacă $a_{k+1} + a_{m-k} \leq n$, cu $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(m-1)$ atunci $a_i + a_{m-k} \leq n$ pentru $1 \leq i \leq k$, ceea ce ar conduce la faptul că printre cele k numere a_{m-k+1}, \dots, a_m regăsim cele $k+1$ numere $a_1 + a_{m-k}, \dots, a_{k+1} + a_{m-k}$ - imposibil. **3p**