

**Concursul de matematică și fizică „Vranceanu – Procopiu”**

13 noiembrie 2010

**Clasa a IX-a**

**1.** a) Arătați că orice număr întreg, multiplu de 6, este egal cu suma a 4 cuburi perfecte.

b) Arătați că orice număr întreg este egal cu suma a 5 cuburi perfecte.

**2.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural și  $A$  o submulțime nevidă a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  cu proprietatea: oricum am lua două elemente  $x, y \in A$ , dacă  $x + y \leq n$ , atunci  $x + y \in A$ .

Arătați că media aritmetică a elementelor lui  $A$  este cel puțin  $\frac{1}{2}(n + 1)$ .