

Concursul de matematică și fizică „Vranceanu – Procopiu”

13 noiembrie 2010

Clasa a XI-a

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$, calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 - 6n^2 + 6n + 1} - \sqrt{n^2 - an + 5} \right).$$

2. Fie numerele reale $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $\alpha \in (0, \pi)$, numărul complex $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ și determinantul de ordin $n + 1$

$$D = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Arătați că

$$|D| \leq \frac{a_0}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$