

Clasa a XI-a

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$, calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 - 6n^2 + 6n + 1} - \sqrt{n^2 - an + 5} \right).$$

Soluție. Limita cerută este

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 - 6n^2 + 6n + 1} - (n - 2) - \left(\sqrt{n^2 - an + 5} - (n - 2) \right) \right) \dots \mathbf{3p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(9 - 6n)}{\sqrt[3]{(n^3 - 6n^2 + 6n + 1)^2} + (n - 2)\sqrt[3]{(n^3 - 6n^2 + 6n + 1)} + (n - 2)^2} - \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(4 - a)n + 1}{\sqrt{n^2 - an + 5} + n - 2} = -2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} ((4 - a)n + 1) = \dots \mathbf{3p} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 4 \\ -\infty, & \text{dacă } a < 4 \\ -\frac{5}{2}, & \text{dacă } a = 4 \end{cases} \dots \mathbf{3p} \end{aligned}$$

2. Fie numerele reale $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $\alpha \in (0, \pi)$, numărul complex $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ și determinantul de ordin $n + 1$

$$D = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Arătați că

$$|D| \leq \frac{a_0}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Soluție. Fie $d(a_0, a_1, \dots, a_n)$ determinantul dat. Dezvoltând după prima coloană, $d(a_0, a_1, \dots, a_n) = z d(a_1, a_2, \dots, a_n) + (-1)^{n+2} a_0 \cdot (-1)^n$, de unde $D = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \dots \mathbf{3p}$

Avem $|(1 - z)D| = |a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}| \dots \mathbf{3p}$

deci $D \leq |a_0| + |(a_1 - a_0)z| + \dots + |(a_n - a_{n-1})z^n| + |a_n z^{n+1}|$

$\leq a_0 + (a_0 - a_1) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = 2a_0.$

Concluzia rezultă acum imediat din $|1 - z| = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \dots \mathbf{3p}$