

Rezolvare, Clasa a XII-a, Problema 1

a) Se demonstrează că perioada oscilațiilor armonice ale pendulului, atunci când plăcile și suportul pendulului sunt în repaus, este dată de expresia:

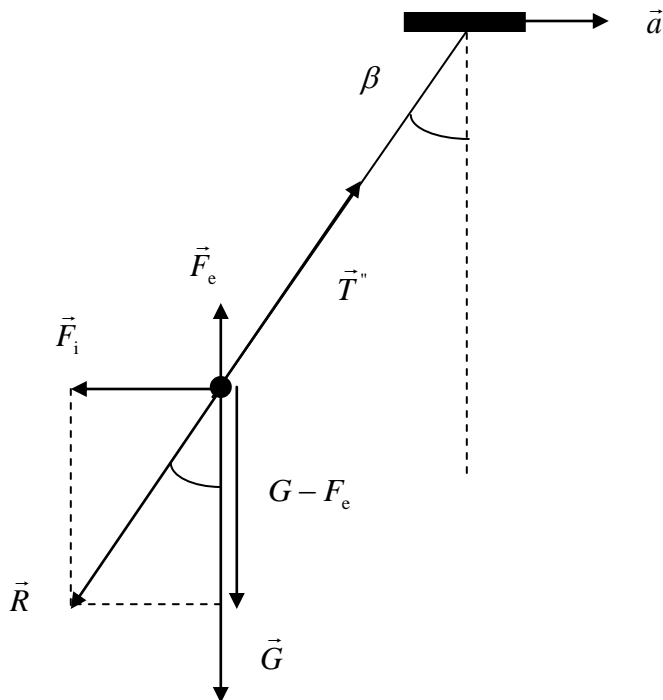
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg \pm F_e}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg \pm qE}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \pm \frac{q}{m}E}},$$

unde: m – masa pendulului; q – sarcina electrică a pendulului; E – intensitatea câmpului electric dintre cele două plăci; g – accelerația gravitațională. Semnele (\pm) corespund celor două orientări posibile ale vectorului \vec{E} .

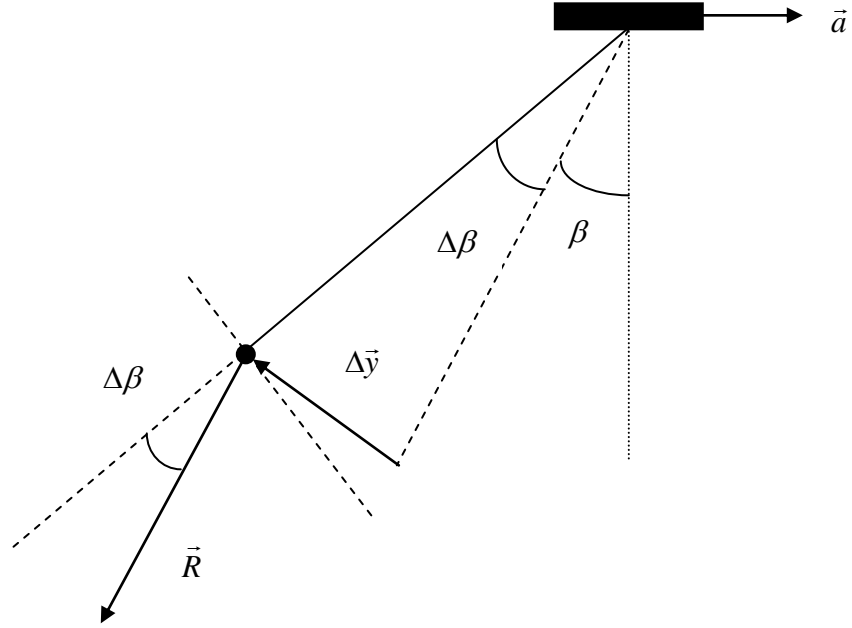
Direcția față de care se efectuează oscilațiile pendulului, atunci când suportul acestuia și cele două plăci conductoare se deplasează cu accelerația orizontală \vec{a} , este reprezentată în figura alăturată, unde sunt reprezentate forțele care acționează asupra pendulului, asigurând echilibrul acestuia, din care rezultă:

$$\tan \beta = \frac{F_i}{G - F_e} = \frac{a}{g - \frac{qE}{m}};$$

$$R = \sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2}.$$



În aceste condiții, utilizând figura alăturată, pentru forța responsabilă de oscilațiile pendulului, obținem:



$$F = R \sin \Delta\beta = \sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2} \sin \Delta\beta,$$

care, pentru oscilații mici devine:

$$F = \sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2} (\Delta\beta); \quad \Delta y \approx l \Delta\beta;$$

$$F = \frac{\sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2}}{l} \Delta y;$$

$$k = \frac{\sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2}}{l}; \quad F = k \Delta y; \quad \vec{F} = -k \Delta \vec{y},$$

ceea ce dovedește că și în acest caz oscilațiile pendulului sunt armonice;

$$k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2}}{l};$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m l}{\sqrt{(mg - F_e)^2 + m^2 a^2}};$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{\sqrt{\left(g - \frac{q}{m} E\right)^2 + a^2}};$$

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 l}{g - \frac{q}{m} E};$$

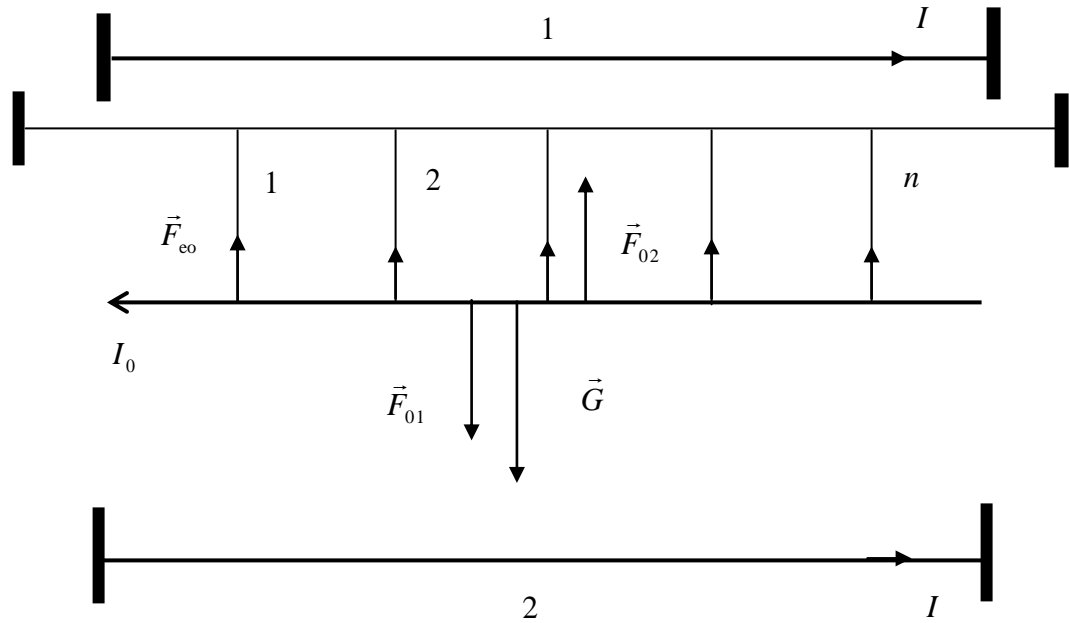
$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T_0^4} + a^2}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T_0^4} + a^2}}};$$

$$T = 2\pi T_0 \sqrt{\frac{l}{\sqrt{16\pi^4 l^2 + a^2 T_0^4}}}.$$

$$\tan \beta = \frac{F_i}{G - F_e} = \frac{a}{g - \frac{qE}{m}}; \tan \beta = \frac{aT_0^2}{4\pi^2 l}.$$

b) Forțele care acționează asupra conductorului mobil, asigurând echilibrul acestuia, fiind cele reprezentate în figura alăturată, rezultă:



$$\vec{G} + \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + n\vec{F}_{e0} = 0;$$

$$F_{01} = F_{02} = \mu_0 \frac{I_0 I}{2\pi d} l,$$

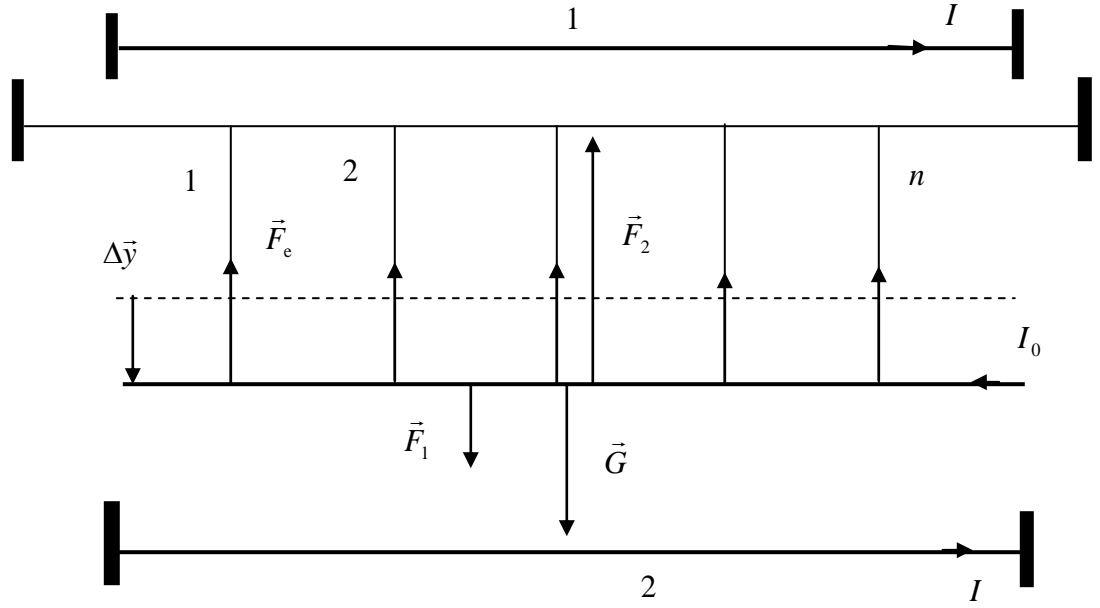
unde l este lungimea fiecărui conductor;

$$\vec{F}_{01} = -\vec{F}_{02}; F_e = k(\Delta y_0),$$

unde (Δy_0) este alungirea fiecărui resort, corespunzător poziției de echilibru a conductorului mobil;

$$nk(\Delta y_0) = mg.$$

Când conductorul mobil este deplasat față de poziția de echilibru, așa cum indică figura alăturată, rezultanta forțelor responsabilă de oscilațiile conductorului mobil este:



$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + n\vec{F}_e \neq 0;$$

$$F = -mg - F_1 + F_2 + nF_e;$$

$$F_e = k(\Delta y_0 + \Delta y);$$

$$F_1 = \mu_0 \frac{I_0 I}{2\pi(d + \Delta y)} l = \mu_0 \frac{I_0 I}{2\pi d \left(1 + \frac{\Delta y}{d}\right)} l = \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 + \frac{\Delta y}{d}\right)^{-1} \approx \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 - \frac{\Delta y}{d}\right);$$

$$F_2 = \mu_0 \frac{I_0 I}{2\pi(d - \Delta y)} l = \mu_0 \frac{I_0 I}{2\pi d \left(1 - \frac{\Delta y}{d}\right)} l = \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 - \frac{\Delta y}{d}\right)^{-1} \approx \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 + \frac{\Delta y}{d}\right);$$

$$F = -mg - \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 - \frac{\Delta y}{d}\right) + \mu_0 l \frac{I_0 I}{2\pi d} \left(1 + \frac{\Delta y}{d}\right) + n(k\Delta y_0 + k\Delta y);$$

$$F = \left(nk + \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2}\right) \Delta y; \quad K = nk + \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2};$$

$$F = K(\Delta y); \quad \vec{F} = -K(\Delta \vec{y}),$$

ceea ce dovedește că oscilațiile verticale mici ale conductorului mobil sunt armonice.

Rezultă:

$$K = nk - \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2} = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = 2\pi d \sqrt{\frac{\pi n}{\pi n k d^2 + \mu_0 I I_0}}.$$

c) Forțele care acționează asupra punctului conductorului orizontal, în poziția de echilibru a acestuia, sunt cele reprezentate în desenul a figura 1, unde \vec{F} – forța electromagnetică, \vec{T}_0 – tensiunea din firul de suspensie.

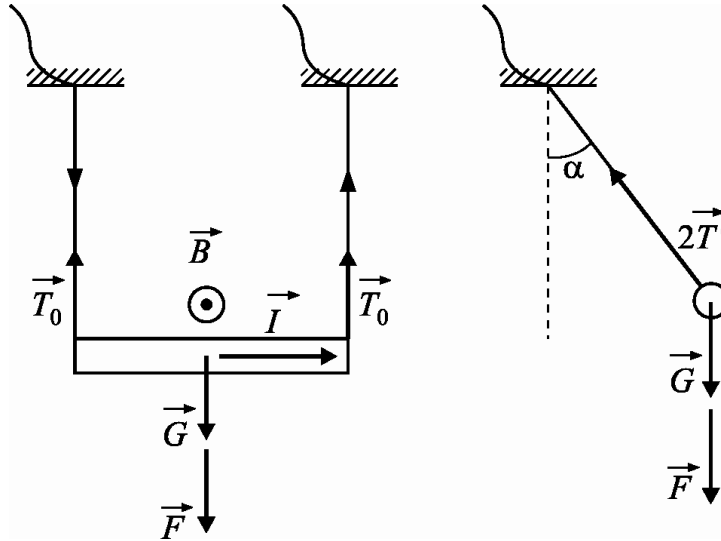


Fig. 1

Când sistemul este deplasat față de poziția de echilibru, astfel încât firele de suspensie formează cu verticala unghiul α , forțele care acționează asupra conductorului orizontal sunt cele reprezentate în desenul b din figura 1, din care se observă că forța electromagnetică își menține valoarea și orientarea.

Dacă $\vec{R} = \vec{G} + \vec{F}$, utilizând figura 2 și presupunând că unghiul α este foarte mic, rezultă:

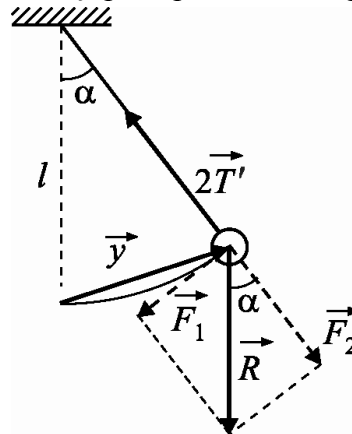


Fig. 2

$$F_1 = R \sin \alpha \approx R \alpha;$$

$$F_1 = \frac{R}{l} y = ky; \quad \vec{F}_1 = -k\vec{y}; \quad k = m\omega^2;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + IlB/m}}.$$

Dacă oscilațiile liniare se efectuează în planul vertical al firelor de suspensie, așa cum indică figura 3, rezultă:

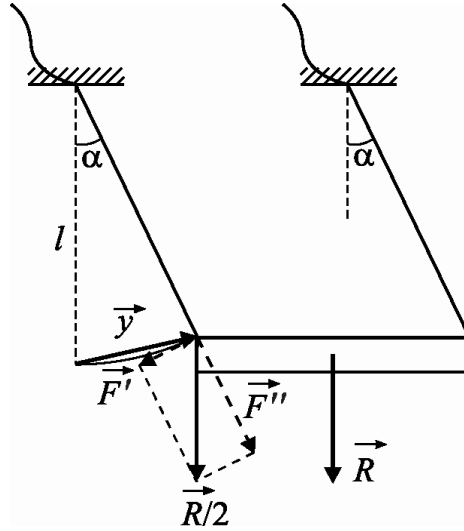


Fig. 3

$$F' = \frac{R}{2} \sin \alpha = \frac{R}{2} \alpha = \frac{R}{2l} y;$$

$$2F' = \frac{R}{l}; \quad 2F' = ky; \quad 2\vec{F}' = -k\vec{y};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + l B / m}}.$$

Rezolvare – Problema 2, Clasa a XII-a

a) Coordonatele de poziție ale celor două stele față de S', și indicațiile ceasornicului din S' în momentele observării celor două explozii sunt:

$$x'_M = \frac{x_M - ut_M}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad y'_M = y_M; \quad z'_M = z_M; \quad t'_M = \frac{t_M - \frac{u}{c^2} x_M}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$x'_N = \frac{x_N - ut_N}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad y'_N = y_N; \quad z'_N = z_N; \quad t'_N = \frac{t_N - \frac{u}{c^2} x_N}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Dacă pentru S intervalul dintre explozii are durata $\Delta t = t_N - t_M$, unde am admis că $t_N > t_M$, atunci durata aceluiași interval, pentru S', este:

$$\Delta t' = t'_N - t'_M = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad \Delta x = x_N - x_M.$$

Dacă pentru S' cele două explozii se succed în aceeași ordine, însemnează că:

$$\Delta t' > 0; \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c^2}{u}.$$

Dacă pentru S' cele două explozii sunt simultane însemnează că:

$$\Delta t' = 0; \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c^2}{u}.$$

Dacă pentru S' cele două explozii își schimbă ordinea de succesiune, însemnează că:

$$\Delta t' < 0; \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{c^2}{u}.$$

b) Originea O'' este un punct în mișcare cu viteza \vec{u}' față de sistemul mobil S' și în mișcare cu viteza \vec{u} față de sistemul fix S, componentele celor două viteze fiind:

$$\vec{u}'(u'_{x'} = 0; u'_{y'} = v; u'_{z'} = 0);$$

$$\vec{u}(u_x; u_y; u_z),$$

astfel încât relațiile dintre aceste componente sunt:

$$u_x = \frac{u'_{x'} + v_0}{1 + \frac{u'_{x'} v_0}{c^2}} = v_0;$$

$$u_y = \frac{u'_{y'} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_{x'} v_0}{c^2}} = v \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}};$$

$$u_z = \frac{u'_{z'} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_{x'} v_0}{c^2}} = 0.$$

Mișcarea punctului O'' în raport cu O fiind rectilinie și uniformă, cu viteza \vec{u} , din figura 1, rezultă:

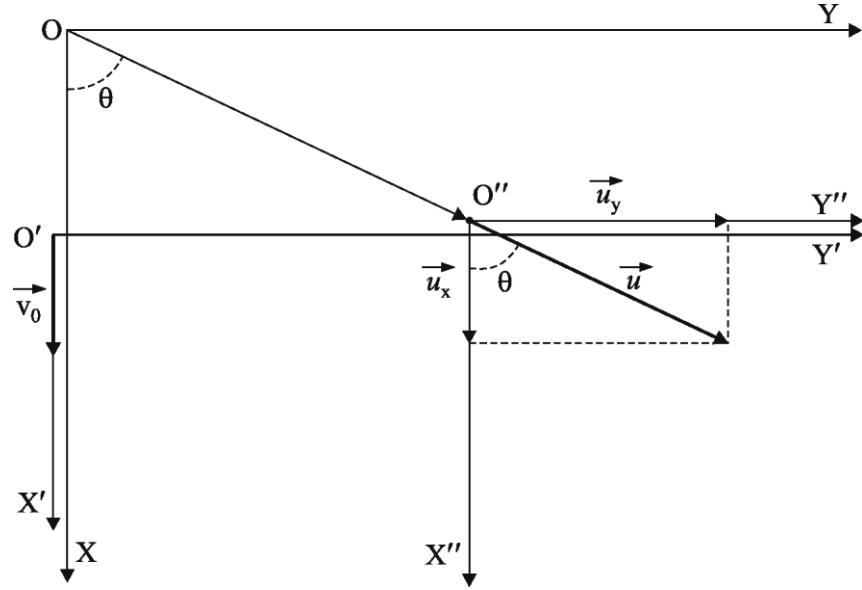


Fig. 1

$$\overrightarrow{OO''} = \vec{u} \cdot t;$$

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_z} = \frac{v}{v_0} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Deplasarea sistemului $S'(O')$, cu viteza \vec{v}_0 , în raport cu sistemul $S(O)$, este echivalentă cu deplasarea sistemului $S(O)$, cu viteza $\vec{w}_0 = -\vec{v}_0$ în raport cu sistemul $S'(O')$.

În aceste condiții originea O este un punct în mișcare cu viteza \vec{u}'' față de sistemul mobil $S''(O'')$ și în mișcare cu viteza \vec{U} față de sistemul fix $S'(O')$, componentele celor două viteze fiind:

$$\vec{u}''(u''_{x''}; u''_{y''}; u''_{z''});$$

$$\vec{U}(U_x = -v_0; U_y = 0; U_z = 0),$$

astfel încât relațiile dintre aceste componente sunt:

$$u''_{x''} = \frac{U_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{U_y v}{c^2}} = -v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$u''_{y''} = \frac{U_y - v}{1 - \frac{U_y v}{c^2}} = -v;$$

$$u''_{z''} = \frac{U_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{U_y v}{c^2}} = 0.$$

Mișcarea punctului O în raport cu O'' fiind rectilinie și uniformă, cu viteza \vec{u}'' , din figura 2 rezultă:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O''O} &= \vec{u}'' t''; \\ \tan \theta'' &= \frac{u''_{y''}}{u''_{x''}} = \frac{v}{v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

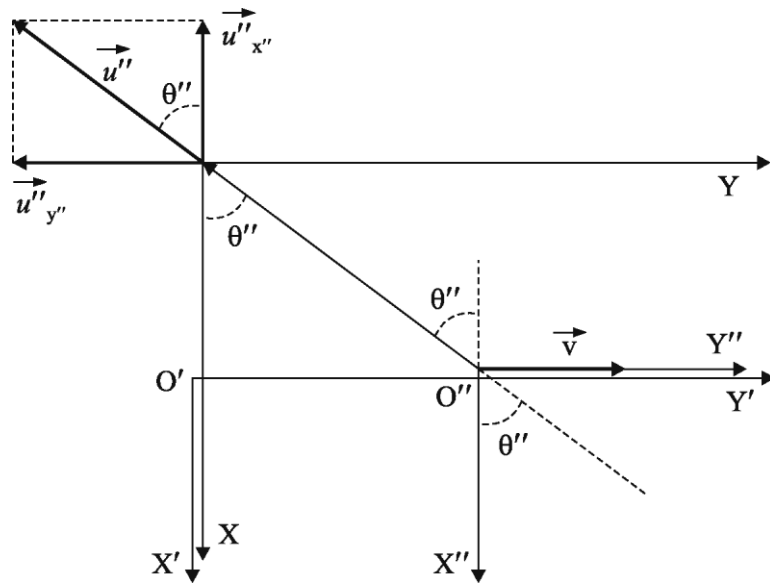


Fig. 2

c) Dacă $v_0 \ll c$ și $v \ll c$, rezultă;

$$\tan \theta \approx \frac{v}{v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{2c^2} \right); \quad \tan \theta'' \approx \frac{v}{v_0} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right).$$

Dacă $v \ll v_0$, rezultă:

$$\begin{aligned} \tan \theta \approx \theta &= \frac{v}{v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{2c^2} \right); \\ \tan \theta'' \approx \theta'' &= \frac{v}{v_0} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right); \end{aligned}$$

$$\theta'' \approx \theta'' = \frac{v}{v_0} \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{v_0^2}{2c^2} \right);$$

$$\theta'' - \theta \approx \frac{v_0 v}{2c^2}.$$