

Clasa a XII-a

1. Fie G o mulțime nevidă și „ \cdot ” o lege de compoziție pe G , care este asociativă și are proprietatea:

pentru orice $a, b \in G$, există $x \in G$ astfel încât $axa = b$.

Arătați că (G, \cdot) este grup.

Soluție. Fie $a \in G$ fixat. Există $u \in G$ astfel încât $aua = a$ **3p**

Deoarece pentru orice $x \in G$ există $y \in G$ astfel încât $aya = x$, observăm că $aux = auaya = aya = x$ și $xua = ayaua = aya = x, \forall x \in G$. Deducem $auua = ua$ și $auua = au$, deci $au = ua \stackrel{\text{not}}{=} e$, cu $ex = xe = x, \forall x \in G$ **3p**

Apoi, pentru orice $x \in G$ există $y \in G$ astfel încât $xyx = e$. Din relația $(xyx)yx = xy(xy x)$, deducem $yx = xy$, deci x , arbitrar ales, are simetricul $x' = xy = yx$ **3p**

2. Fie numerele reale $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ și funcțiile $f_0, f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date de $f_0(x) = a_0$ și, pentru $k = 1, 2, \dots, n$,

$$f_k(x) = a_k + \int_0^x f_{k-1}(x) dx.$$

Presupunem că $f_n(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că, în acest caz, $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, $g = f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}$. Observăm că f este funcție polinomială, iar ipoteza conduce la faptul că n este par, $a_0 > 0$ și, deci, f are un punct de minim x_0 **4p**

Apoi, deoarece $f'_k = f_{k-1}, \forall k = 1, \dots, n$ și $f'_0 = 0$, deducem $f' = g$; cum $f'(x_0) = g(x_0) = 0$ și $f_n(x_0) \geq 0$, rezultă $f(x_0) \geq 0$ **5p**