

**Concursul de matematică și fizică „Vranceanu – Procopiu”**

13 noiembrie 2010

**Clasa a XII-a**

**1.** Fie  $G$  o mulțime nevidă și „ $\cdot$ ” o lege de compoziție pe  $G$ , care este asociativă și are proprietatea:

pentru orice  $a, b \in G$ , există  $x \in G$  astfel încât  $axa = b$ .

Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup.

**2.** Fie numerele reale  $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$  și funcțiile  $f_0, f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date de  $f_0(x) = a_0$  și, pentru  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$f_k(x) = a_k + \int_0^x f_{k-1}(x) dx.$$

Presupunem că  $f_n(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Arătați că, în acest caz,  $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .