

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ  
VRÂNCEANU – PROCOPIU**

**13 noiembrie 2010**

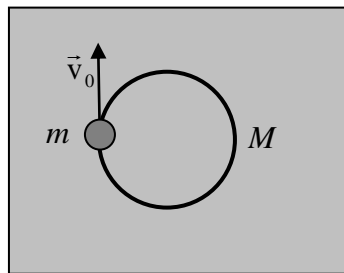
**BACĂU**

**Proba de Baraj**

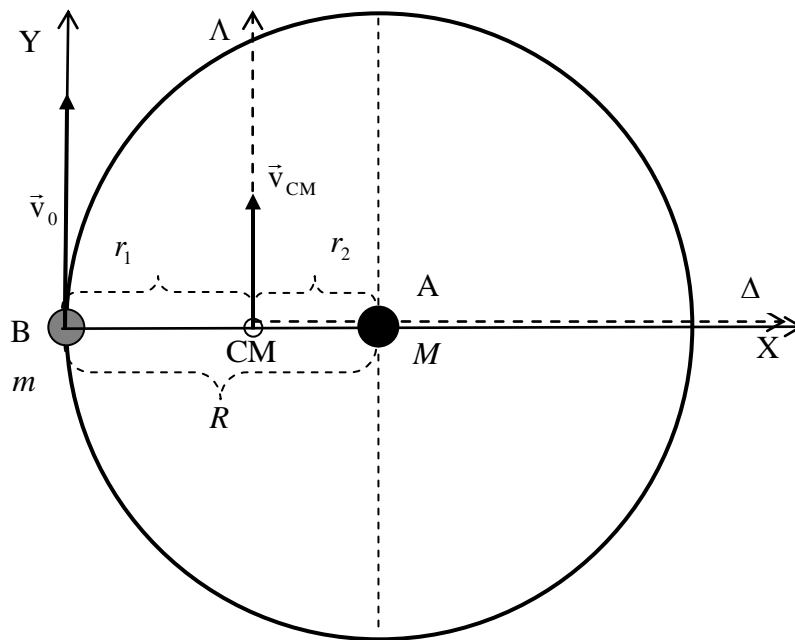
**Problema de Mecanică - Problema 2**

**Rezolvare - BARAJ**

a) La momentul inițial, în vedere de deasupra suportului orizontal al inelului, elementele sistemului sunt reprezentate în desenul din figura alăturată.



Asimilând inelul cu un punct material, având masa  $M$ , plasat în centrul  $A$  al inelului, iar bila sferică un punct material cu masa  $m$ , la distanța  $R$ , aflat la momentul inițial în punctul  $B$ , atunci centrul de masă,  $CM$ , al sistemului este un punct de pe segmentul  $AB$ , așa cum indică figura alăturată, situat la distanțele  $r_1$  și respectiv  $r_2$  față de punctele  $A$  și respectiv  $B$ .



Utilizând un sistem de referință S, solidar cu laboratorul, având originea în punctul B de pe suport, corespunzător poziției inițiale a bilei, și axele de coordonate BX și BY orientate așa cum indică figura alăturată, în acord cu definiția CM, rezultă:

$$r_1 + r_2 = R; mr_1 = Mr_2; r_1 = \frac{MR}{m+M}; r_2 = \frac{mR}{m+M};$$

$$v_{CM} = \frac{mv_0}{m+M}.$$

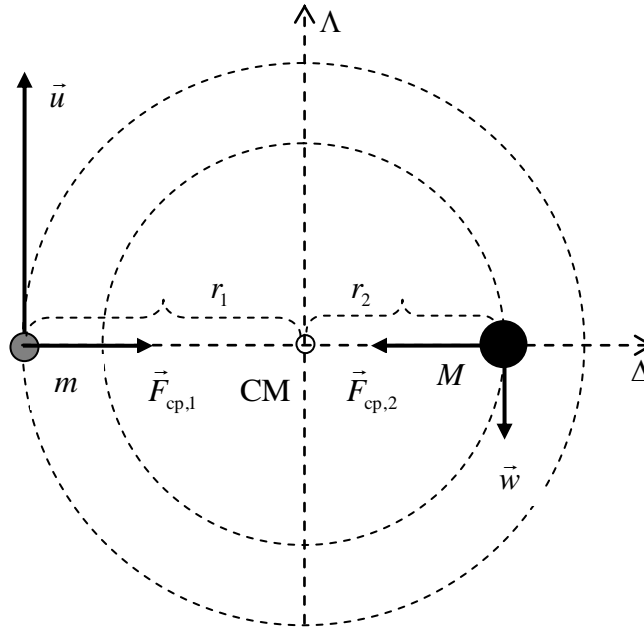
În sistemul de referință  $\Sigma$ , atașat CM, cu originea în CM, ale cărei axe de coordonate,  $\Delta$  și respectiv  $\Lambda$ , au aceleași orientări cu axele X și respectiv Y ale sistemului S, mișcările celor două puncte materiale vor fi circulare și uniforme, așa cum, la momentul inițial, indică figura alăturată, cu vitezele:

$$\vec{v}_{bila,CM} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{CM} = \vec{u}; u = v_0 - v_{CM}; u = \frac{Mv_0}{m+M};$$

$$\vec{v}_{inel,CM} = 0 - \vec{v}_{CM} = \vec{w}; w = \frac{mv_0}{m+M},$$

vitezele unghiulare ale celor două puncte materiale fiind identice:

$$\omega = \frac{u}{r_1} = \frac{w}{r_2} = \frac{v_0}{R}.$$



Cele două forțe, rezultate din interacțiunea celor două corpuri, acțiunea inelului asupra bilei și reacțiunea bilei asupra inelului, reprezentate în figura anterioară, justifică mișcările circulare uniforme ale bilei și a centrului inelului, în raport cu centrul lor de masă.

Ca urmare, cele două forțe, în raport cu CM sunt două forțe centripete, pentru care avem:

$$F_{cp,1} = m\omega^2 r_1 = m \frac{v_0^2}{R^2} \frac{MR}{m+M} = \frac{mM v_0^2}{R(m+M)};$$

$$F_{cp,2} = M\omega^2 r_2 = M \frac{v_0^2}{R^2} \frac{mR}{m+M} = \frac{mM v_0^2}{R(m+M)};$$

$$F_{cp,1} = F_{cp,2}; \quad \vec{F}_{cp,1} = -\vec{F}_{cp,2}.$$

După timpul  $t$ , când pozițiile celor două puncte materiale pe cercurile lor sunt cele reprezentate în figura alăturată, proiecțiile vectorului  $\vec{u}$  pe axele  $\Delta$  și respectiv  $\Lambda$  ale sistemului  $\Sigma$  asociat centrului de masă al sistemului sunt:

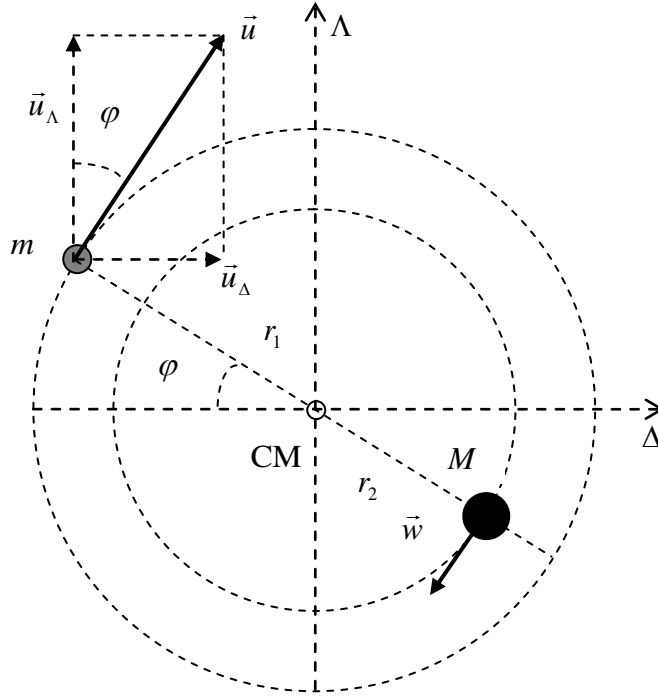
$$u_{\Lambda} = u \sin \varphi = \frac{Mv_0}{m+M} \sin \omega t;$$

$$u_{\Delta} = u \cos \varphi = \frac{Mv_0}{m+M} \cos \omega t,$$

astfel încât componentele vitezei bilei,  $\vec{v}$ , la același moment  $t$ , în raport cu axele X și respectiv Y, ale sistemului S sunt:

$$v_X = u_{\Delta} = \frac{Mv_0}{m+M} \cos \omega t;$$

$$v_Y = u_{\Lambda} + v_{CM} = \frac{Mv_0}{m+M} \sin \omega t + \frac{mv_0}{m+M}.$$



b) În aceste condiții, la momentul  $t$ , în raport cu sistemul de referință al laboratorului, S, energia cinetică a bilei este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m(v_X^2 + v_Y^2);$$

$$E_c = \frac{m}{2} \left[ \frac{M^2 v_0^2}{(m+M)^2} \cos^2 \omega t + \frac{M^2 v_0^2}{(m+M)^2} \sin^2 \omega t + \frac{2mMv_0^2}{(m+M)^2} \sin \omega t + \frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^2} \right];$$

$$E_c = \frac{m}{2} \left[ \frac{M^2 v_0^2}{(m+M)^2} + \frac{2mMv_0^2}{(m+M)^2} \sin \omega t + \frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^2} \right];$$

$$E_c = \frac{mv_0^2}{2(m+M)^2} (M^2 + m^2 + 2mM \sin \omega t).$$

Valoarea minimă a energiei cinetice a bilei se va realiza în momentul când  $\sin \omega t = -1$ , astfel încât energia cinetică minimă a bilei va fi:

$$E_{c,\min} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{(M-m)^2}{(m+M)^2}.$$

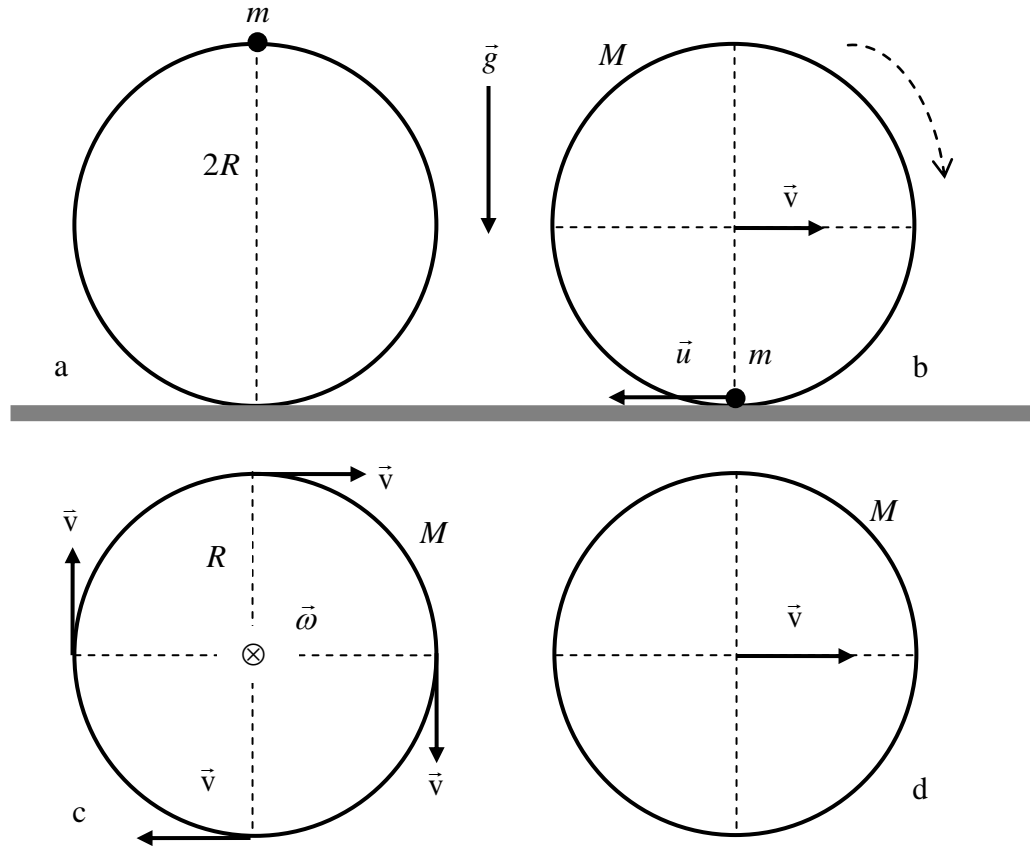
$$E_{c,\min} = \frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{(M-m)^2}{(m+M)^2}; \quad v_{\min} = v_0 \frac{M-m}{M+m}.$$

În acord cu legea conservării energiei, corespunzător momentului în care energia cinetică a bilei este minimă, energia cinetică a inelului va fi maximă, astfel încât rezultă:

$$\frac{mv_0^2}{2} = E_{c,bil,\min} + E_{c,inel,\max} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2};$$

$$E_{c,inel,\max} = \frac{mv_0^2}{2} \left[ 1 - \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2} \right] = \frac{2m^2 M v_0^2}{(M+m)^2}.$$

c) În acord cu legile de conservare ale energiei și impulsului, utilizând secvențele din figura alăturată, în care se evidențiază faptul că rostogolirea inelului este rezultatul compunerii unei rotații cu o translație, rezultă:



$$mg2R = \frac{mu^2}{2} + E_{\text{c, rostogolire inel}};$$

$$mg2R = \frac{mu^2}{2} + E_{\text{c, rotatie inel}} + E_{\text{c, translatie inel}};$$

$$mg2R = \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}; \quad I = \frac{1}{2}MR^2; \quad \omega = \frac{v}{R};$$

$$2mu^2 + 3Mv^2 = 8mgR;$$

$$mu = Mv;$$

$$u = 2\sqrt{\frac{2MgR}{3m+2M}}; \quad v = 2\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2mgR}{3m+2M}}.$$

*Caz particular:*

$$M \gg m; \quad v = 0; \quad u = 2\sqrt{gR}.$$