



Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vrânceanu – Procopiu"

Ediția a XII –a, 2010

Problema a III-a (10 puncte)

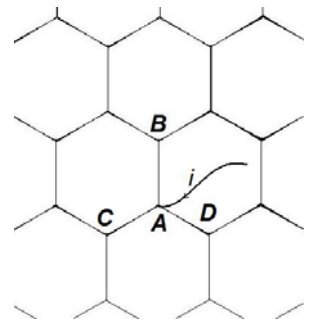
Simetrie și superpoziție

A. Imaginează-ți că rețeaua electrică din figura alăturată este alcătuită dintr-un număr infinit de hexagoane. Fiecare latură de hexagon este un fir metalic având rezistența electrică R .

a. Consideră că în rețeaua electrică, se injectează prin nodul A un curent electric având intensitatea i . Determină intensitățile curenților care circulă prin laturile AC , AB și respectiv AD . Realizează un desen care să evidențieze sensurile acestor curenți.

b. Imaginează-ți ca printr-un alt nod al rețelei s-ar extrage din rețea curentul electric cu intensitatea i . Determină intensitățile curenților care circulă prin fiecare dintre cele trei laturi care se întâlnesc în respectivul nod.

c. Determină expresia rezistenței electrice echivalente între nodurile A și B , ale rețelei electrice infinite din figură.

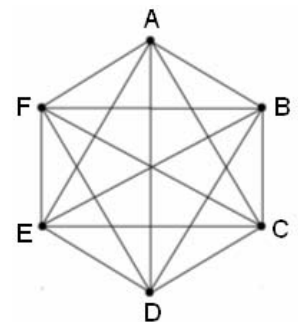


B. Cele șase vârfuri ale hexagonului din figură sunt legate între ele, fiecare cu fiecare, prin fire metalice având fiecare rezistența R . Firele sunt izolate la exterior, astfel încât contacte electrice între fire nu există decât în vârfurile hexagonului care sunt noduri ale unei rețele electrice. Rețeaua astfel construită este alimentată între punctele A și D cu un curent electric având intensitatea i .

a. Presupune că ai schimba între ele pozițiile unor noduri de exemplu F cu E . Analizează situația (eventual redesenează schema electrică) și determină diferența de potențial dintre nodurile F și E .

b. Determină expresia rezistenței electrice echivalente a rețelei din figură, între nodurile A și D .

c. Consideră că toate vârfurile unui poligon regulat cu 13112010 (data probei) vârfuri sunt legate între ele fiecare cu fiecare cu fire prin fire metalice având fiecare rezistența R . Firele sunt izolate la exterior astfel încât contacte electrice între fire nu există decât în vârfurile poligonului, care sunt noduri ale rețelei electrice. Determină rezistența electrică măsurată între două noduri diametral opuse din această rețea.



Simetrie și superpoziție - Soluție

A.

a. Din motive de simetrie, prin fiecare dintre cele trei laturi de circuit care pleacă din A trebuie să circule curenți de intensități egale, adică

$$i_{AB} = i_{AC} = i_{AD} = \frac{i}{3} \quad (1)^*$$

În fiecare dintre cele trei laturi curenții „curg” dinspre A - ca în figura 1.

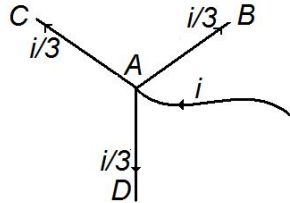


Figura 1 Distribuția curenților în laturile care se întâlnesc în nodul prin care se injectează curent

În sprijinul acestei distribuții a curenților se poate aduce următorul experiment mental. Presupune că îi ceri observatorului rețelei să închidă ochii, și în timpul în care acesta nu vede, rețeaua este rotită cu 120° în jurul unei axe perpendiculare pe suprafața rețelei și care trece prin nodul prin care se injectează curentul. Atunci când observatorul deschide ochii, el vede rețeaua exact așa cum a văzut-o și înainte să închidă ochii. Dacă prin cele trei laturi care pleacă din nodul prin care se injectează curentul ar trece curenți diferiți, ar însemna că distribuția de curenți se modifică, doar pentru că observatorul a închis și a deschis ochii.

b. Din aceleași motive, dacă se extrage curentul cu intensitatea i prin nodul B , intensitățile curenților care curg spre acest nod din cele trei laturi care se întâlnesc în B sunt

$$i_{BF} = i_{BG} = i_{BA} = \frac{i}{3} \quad (2)^*$$

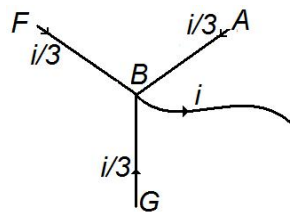


Figura 2 Distribuția curenților în laturile care se întâlnesc în nodul prin care se extrage curent

c. Suprapunând cele două situații, adică injectând curentul cu intensitatea i prin nodul A și simultan extrăgând curentul cu intensitatea i prin nodul B , distribuțiile de curenți corespunzătoare fiecărei situații în parte se suprapun, astfel că prin latura care leagă direct nodurile A și B trece curentul cu intensitatea

$$i_{A,B,total} = \frac{2i}{3} \quad (3)$$

Situația este prezentată în figura 3.

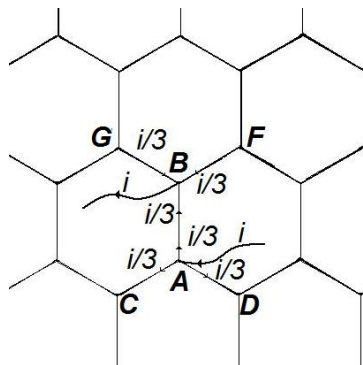


Figura 3 Superpoziția situațiilor de injectare de curent prin nodul A și extragere de curent prin nodul B

O schemă echivalentă a rețelei inițiale din figura din enunț este prezentată în figura 4. În această figură R_{retea} reprezintă rezistența electrică echivalentă a întregii rețele, cu excepția rezistenței firului care leagă nodurile A și B .

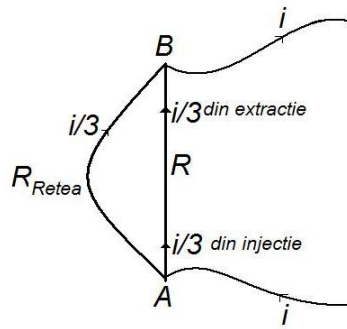


Figura 4 Distribuția curenților în schema echivalentă

Deoarece prin latura AB a circuitului trece curentul cu intensitatea $i_{A,B,total}$ prin R_{retea} trebuie să treacă un curent cu intensitatea

$$i_{R_{retea}} = \frac{i}{3} \quad (4)$$

Deoarece diferența de potențial este aceeași la capetele firului AB și la capetele R_{retea} , rezistența R_{retea} prin care trece un curent de două ori mai mic, trebuie să fie de două ori mai mare decât R

$$R_{retea} = 2R \quad (5)^*$$

Rezistența echivalentă a rețelei între nodurile A și B , R_{AB} va avea valoarea

$$R_{AB} = \frac{R \cdot R_{retea}}{R + R_{retea}} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R \quad (6)^*$$

B.

a. Schimbând între ele pozițiile nodurilor F și E Schema electrică rămâne strict identică. Acest fapt se poate observa în figura 5.

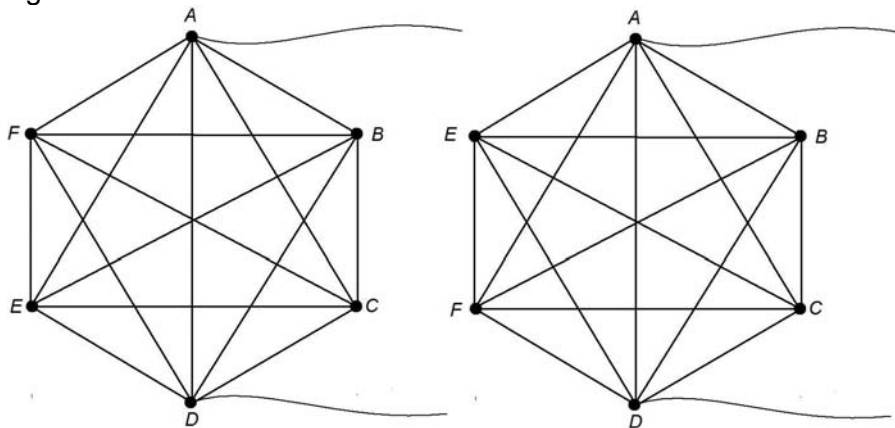


Figura 5 Rețeaua electrică este invariantă la schimbarea între ele a nodurilor F și E

Nodurile F și E sunt prin urmare echipotențiale. Potențialele lor electrice V_E și V_F sunt egale.

$$V_E = V_F \quad (7)^*$$

b. Schimbând între ele pozițiile nodurilor E și B , sau E și C , sau F și C , sau F și B același tip de raționament conduce la concluzia că toate nodurile – cu excepția celor între care se face măsurarea rezistenței echivalente – sunt echipotențiale. Toate aceste noduri ar putea fi legate între ele. Curentul electric circulă numai prin firul care leagă direct nodurile A și D și respectiv prin firele care leagă nodul comun (B,C,E,F) cu fiecare dintre nodurile A și D .

Desenul din figura 6a arată o primă etapă în calculul rezistenței echivalente, iar cel în figura 6b este prezentată etapa finală a acestei echivalări.

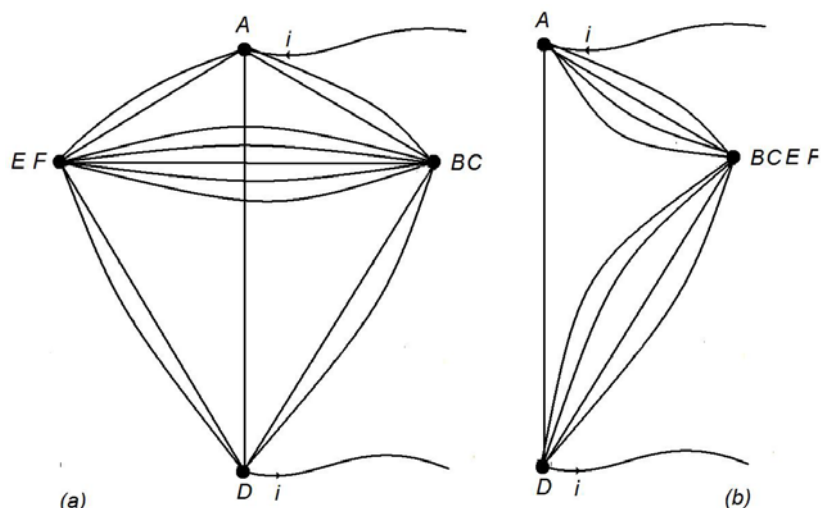


Figura 6 Etapele de construire a schemei echivalente a circuitului

Rezistența echivalentă a rețelei din figură între nodurile A și D are expresia

$$\frac{1}{R_{\text{echivalent AD}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(R/4) + (R/4)} = \frac{1}{R} + 2 \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \quad (8)$$

$$R_{\text{echivalent AD}} = \frac{R}{3} \quad (9)$$

Observație:

Oricare ar fi nodurile între care se măsoară rezistența electrică, toate celelalte noduri sunt echipotențiale și prin urmare pot fi legate între ele. Curentul curge prin rețea între cele două noduri prin firul care le leagă direct și prin două ansambluri înseriate de câte patru rezistențe legate în paralel, provenind de la firele care leagă nodul de intrare sau cel de ieșire al curentului cu „nodul” rezultat din legarea între ele celor patru noduri echipotențiale. Rezistența echivalentă a circuitului este aceeași între oricare două noduri ale rețelei.

c. Conform enunțului toate vârfurile unui poligon regulat cu n vârfuri sunt legate între ele fiecare cu fiecare cu fire prin fire metalice având fiecare rezistența R

Dacă se măsoară rezistența între două noduri oarecare ale structurii, toate celelalte noduri – cu excepția celor între care se face măsurarea – sunt echipotențiale și pot fi reunite. Ele sun în număr de

$$N_{\text{echipotențiale}} = (n - 2) \quad (10)$$

În aceste condiții, curentul curge prin rețea între cele două noduri prin firul care le leagă direct și prin două ansambluri înseriate de câte $(n - 2)$ rezistențe legate în paralel, provenind de la firele care leagă nodul de intrare sau cel de ieșire al curentului cu „nodul” rezultat din legarea între ele celor $(n - 2)$ noduri echipotențiale.

Rezistența echivalentă $R_{\text{echivalent}}$ între două noduri oarecare ale n -gonului este

$$\frac{1}{R_{\text{echivalent}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(R/(n-2)) + (R/(n-2))} = \frac{2}{2R} + \frac{n-2}{2R} = \frac{n}{2R} \quad (11)$$

$$R_{\text{echivalent}} = \frac{2R}{n} \quad (12)$$

Prin urmare rezistența echivalentă a rețelei construită pe baza poligonului cu 13112010 vârfuri este

$$R_{\text{echivalent, 2010}} = \frac{2R}{131120} = \frac{R}{65560} \quad (13) *$$

între oricare două noduri ale sale.

Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare și Examinare – Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București