



Problema I (10 puncte)

Fizica șemineului

1.1 Introducere în fizica șemineului

Gazele rezultate din arderea combustibilului solid într-un șemineu (sobă cu horn) sunt evacuate în atmosferă, printr-un coș cu înălțimea h și cu secțiunea transversală având aria A (vezi figura 1). Consideră că temperatura în interiorul sobei este T_s , că volumul gazelor produse în unitatea de timp în sobă este B și că temperatura aerului atmosferic este T_a .

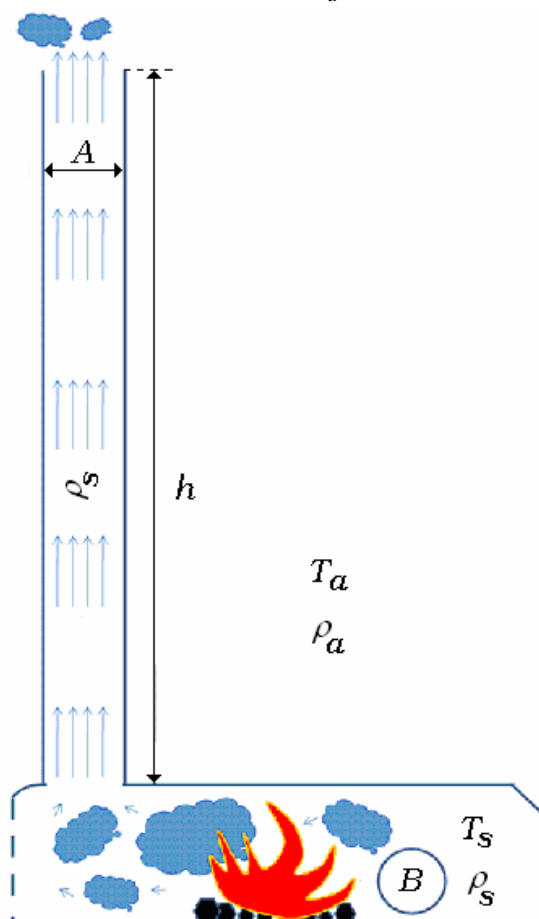


Figura 1. Schița sobei cu coș de înălțime h la temperatura T_s . Desenul nu este realizat la scară.

Presupune că:

- viteza gazelor în sobă este neglijabil de mică;
- densitatea gazelor (fumului) nu diferă de densitatea aerului, la aceeași presiune și temperatură; gazele aflate în sobă pot fi tratate ca fiind ideale;

- presiunea aerului variază cu înălțimea conform principiului fundamental al hidrostatiei; variația densității aerului cu înălțimea este neglijabilă;
- jetul de gaze respectă ecuația lui Bernoulli care statuează că următoarea cantitate se conservă în fiecare punct al jetului:

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const}$$

unde ρ este densitatea gazului, $v(z)$ este viteza acestuia, $p(z)$ este presiunea și z este înălțimea;

- variația densității gazului este neglijabilă în întregul șemineu.

1.1.1 Sarcina de lucru 1

1a) Determină expresia înălțimii minime a coșului, care asigură funcționarea eficientă a șemineului, astfel încât toate produsele gazoase de ardere să fie eliberate în atmosferă. Exprimă rezultatul în funcție de B , A , T_a , $\Delta T = T_s - T_a$ și de accelerația gravitațională g .

Important: Pentru toate sarcinile de lucru ce urmează consideră că înălțimea coșului se referă la înălțimea minimă, care asigură funcționarea eficientă a șemineului.

1b) Presupune că două șeminee sunt construite pentru a fi utilizate în același scop, dar pentru a funcționa în regiuni diferite ale lumii. Unul dintre șeminee este proiectat pentru a funcționa într-o regiune rece, unde temperatura medie a atmosferei de -30°C , iar celălalt este proiectat pentru a funcționa într-o regiune caldă, unde temperatura medie a atmosferei de 30°C . Secțiunile transversale ale coșurilor celor două șeminee sunt identice, iar temperatura în sobă este de 400°C . S-a calculat că înălțimea coșului șemineului proiectat să funcționeze în regiunea rece este de 100m . Determină înălțimea coșului șemineului proiectat să funcționeze în regiunea caldă.

1c) Trasează o schiță/ diagramă care să evidențieze modul în care variază viteza gazelor de-a lungul înălțimii coșului unui șemineu. Presupune că aria secțiunii transversale a coșului este constantă pe toată lungimea acestuia. Indică pe diagramă locul în care gazele intră din sobă în coș.

1d) Dedu dependența $p_s = p_s(z)$ a presiunii gazelor rezultate din ardere de coordonata z în coșul șemineului. Exprimă rezultatul în funcție de presiunea atmosferică de la baza coșului, de accelerația gravitațională g , de densitatea ρ_a a aerului, de densitatea ρ_s a gazelor, de înălțimea h și de coordonata z a punctului din coș.

1.2 Centrală solară

Circulația gazelor prin coșul unui șemineu poate fi folosită pentru construirea unui tip special de centrală solară - centrală solară cu șemineu. Ideea este ilustrată în figura 2. Soarele încălzește aerul de sub colectorul de arie S . Colectorul este deschis la periferie, permițând intrarea nestânjenită a aerului (vezi figura 2). Pe măsură ce aerul cald (reprezentat prin săgețile subțiri și continue) urcă pe verticală prin coș, noi cantități de aer rece (reprezentate prin săgeți groase și punctate) intră în colector din mediul înconjurător, asigurând o circulație continuă a aerului prin centrală. Jetul de aer prin coș pune în mișcare o turbină, ceea ce conduce la producerea de energie electrică. Energia radiației solare pe unitatea de timp și pe unitatea de arie orizontală a colectorului se notează cu G . Presupune că toată energia radiației solare incidente pe colector poate fi utilizată pentru încălzirea aerului din colector. Temperatura aerului rece este T_a , iar căldura specifică a aerului este c . Consideră că se poate neglija dependența căldurii specifice de temperatura aerului.

Randamentul centralei solare cu șemineu este definit ca raportul dintre energia cinetică a jetului de aer și energia solară absorbită pentru încălzirea aerului, până la intrarea acestuia în coș.

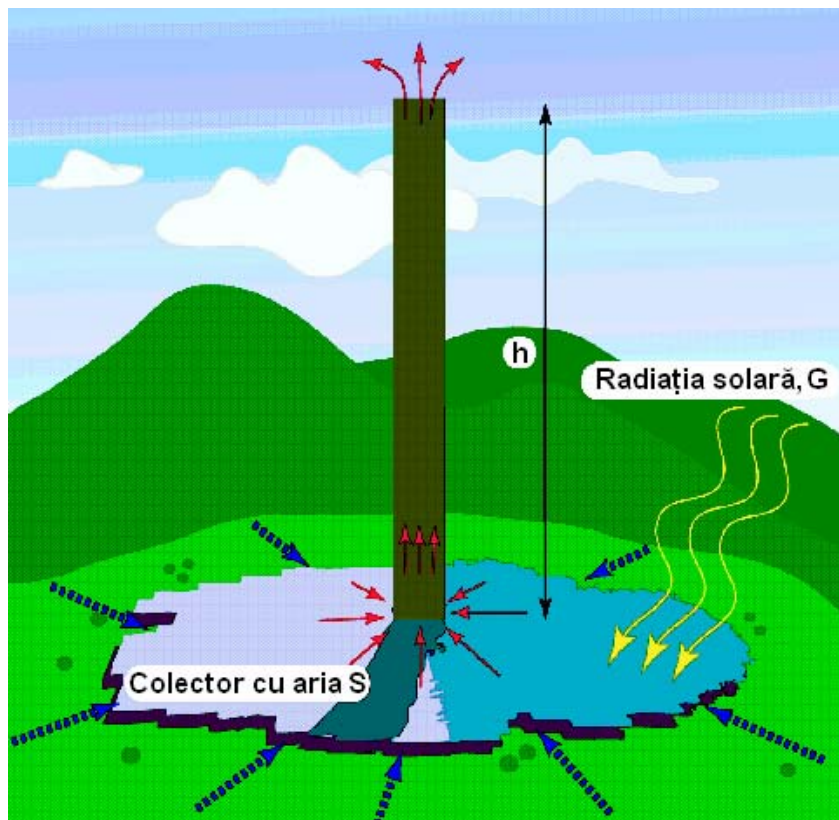


Figura 2. Schița unei centrale solare.

1.2.1 Sarcina de lucru 2

- 2a) Determină expresia randamentului centralei solare cu șemineu. Exprimă rezultatul în funcție de g , h , c și T_a .
- 2b) Trasează o diagramă care să ilustreze calitativ dependența randamentului centralei solare cu șemineu de înălțimea coșului.

1.3 Prototipul Manzanares

Coșul centralei solare prototip, construită la Manzanares, Spania are o înălțime de $195m$ și o rază de $5m$. Colectorul său este circular și are diametrul de $244m$. Căldura specifică a aerului în condiții tipice de lucru pentru coșul centralei solare prototip este de $1012J/(kg \cdot K)$, densitatea aerului cald este de aproximativ $0,9kg/m^3$, iar valoarea tipică a temperaturii atmosferei este $T_a = 295K$. În Manzanares, în cursul unei zile însorite, puterea solară pe unitatea de suprafață orizontală are valoarea tipică de $150W/m^2$. Consideră $g = 9,81m/s^2$.

1.3.1 Sarcina de lucru 3

- 3a) Calculează valoarea randamentului centralei solare prototip de la Manzanares.
- 3b) Determină valoarea numerică a puterii ce poate fi produsă cu ajutorul centralei solare prototip.
- 3c) Estimează valoarea energiei ce poate fi produsă de centrala solară prototip, în timpul unei zile însorite tipice.

1.3.2 Sarcina de lucru 4

- 4a) Determină expresia pentru creșterea de temperatură $\Delta T'$ a aerului, atunci când acesta trece din mediul înconjurător (cu aer rece) în coșul centralei (cu aer cald) și calculează-i valoarea numerică.
- 4b) Calculează valoarea debitului masic al jetului de aer care circulă prin centrala solară cu șemineu de la Manzanares.

1.4 Soluție - Fizica șemineului

1.4.1 Soluție la sarcina de lucru 1

1a) Determină expresia înălțimii minime a coșului, care asigură funcționarea eficientă a șemineului, astfel încât toate produsele gazoase de ardere să fie eliberate în atmosferă. Exprimă rezultatul în funcție de B , A , T_a , $\Delta T = T_s - T_a$ și de accelerația gravitațională g .

Gazele rezultate din arderea combustibilului solid într-un șemineu (sobă cu horn) sunt evacuate în atmosferă prin coșul cu înălțimea h și cu aria secțiunii transversale A (figura 3). În cadrul sarcinii de lucru nr.1 se folosesc următoarele notații:

ρ_a - densitatea aerului atmosferic;

ρ_s - densitatea gazelor rezultate din arderea combustibilului solid;

T_a - temperatura aerului atmosferic;

T_s - temperatura în sobă (în incinta în care arde combustibilul solid).

Principiul fundamental al hidrostaticii, aplicat pentru aerul atmosferic imobil din exteriorul coșului, conduce la următoarea expresie:

$$p_a(0) = p_a(h) + \rho_a g h \quad (1)$$

unde

$p_a(0)$ este presiunea atmosferică la baza coșului

$p_a(h)$ este presiunea atmosferică la partea superioară a coșului.

Legea lui Bernoulli referitoare la jetul de gaze rezultate din ardere, aplicată pentru zona de la baza și de la capătul de sus al coșului este:

$$0 + 0 + p_s(0) = \frac{\rho_s \cdot v^2(h)}{2} + \rho_s g h + p_s(h) \quad (2)$$

unde

$p_s(0)$ este presiunea statică a jetului de gaze la baza coșului ($z=0$);

$p_s(h)$ este presiunea statică a jetului la partea superioară a coșului;

$v(h)$ este viteza jetului de gaze la ieșirea din coș pe la partea superioară a acestuia.

Întrucât coșul sobei este deschis la ambele capete către atmosferă

$$\begin{cases} p_s(0) = p_a(0) \\ p_s(h) = p_a(h) \end{cases} \quad (3)$$

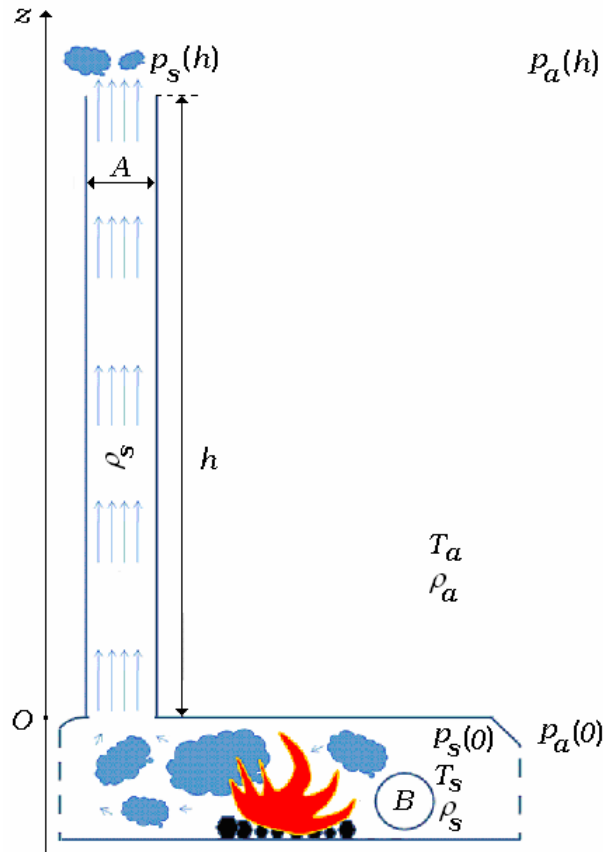


Figura 3. Schița sobei cu coș de înălțime h , la temperatura T_s . Desenul nu este realizat la scară.

Combinând relațiile (1), (2) și (3) se obține:

$$p_a(0) = \frac{\rho_s \cdot v^2(h)}{2} + \rho_s g h + p_a(0) - \rho_a g h \quad (4)$$

respectiv

$$v^2(h) = 2gh \left(\frac{\rho_a}{\rho_s} - 1 \right) \quad (5)$$

Având în vedere că densitatea $\rho_s' = \frac{p \mu_s}{RT}$ a gazelor rezultate din ardere nu diferă de densitatea

$\rho_a' = \frac{p \mu_a}{RT}$ a aerului atmosferic în aceleași condiții de presiune p și de temperatură T , rezultă că

$$\mu_s = \mu_a \quad (6)$$

Prin urmare se pot scrie următoarele expresii pentru densitatea aerului, respectiv pentru densitatea gazelor.

$$\begin{cases} \rho_s = \frac{p_a(0) \cdot \mu_a}{RT_s} \\ \rho_a = \frac{p_a(0) \cdot \mu_a}{RT_a} \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_s} = \frac{T_s}{T_a} \quad (8)$$

Combinând relațiile (5) și (8) se obține

$$v^2(h) = 2gh \left(\frac{T_s}{T_a} - 1 \right) \quad (9)$$

sau

$$v(h) = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_a}} \quad (10)$$

Pentru ca gazele să fie evacuate din coș trebuie ca debitul volumic de ieșire a gazelor, prin partea superioară a coșului să fie mai mare decât debitul volumic B al gazelor la intrarea în coș

$$A \cdot v(h) \geq B \quad (11)$$

Din relațiile (10) și (11) se obține

$$A \cdot \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_a}} \geq B \quad (12)$$

Prin urmare înălțimea minimă a coșului este

$$h_{min} = \frac{B^2 T_a}{A^2 2g \Delta T} \quad (13)^*$$

Relația (13) reprezintă răspunsul la punctul 1a).

1b) Determină înălțimea coșul șemineului proiectat să funcționeze în regiunea caldă.

Ținând cont de precizarea din enunț, referitoare la faptul că pentru toate sarcinile de lucru ce urmează se consideră că înălțimea coșului se referă la înălțimea sa minimă, care asigură funcționarea eficientă a șemineului și aplicând relația (13) pentru un șemineu proiectat să funcționeze într-o regiune rece, în care temperatura medie a aerului atmosferic este $T_{a, rece}$, și temperatura în șemineu este T_s se obține expresia

$$h_{reg, rece} = \frac{B^2 T_{a, rece}}{A^2 2g (T_s - T_{a, rece})} \quad (14)$$

Pentru un șemineu proiectat să funcționeze într-o regiune caldă, unde temperatura medie a aerului atmosferic este $T_{a, cald}$ și temperatura în șemineu este T_s înălțimea coșului are expresia

$$h_{reg, cald} = \frac{B^2 T_{a, cald}}{A^2 2g (T_s - T_{a, cald})} \quad (15)$$

Combinând relațiile (14) și (15) rezultă

$$\frac{h_{reg, rece}}{h_{reg, cald}} = \frac{\frac{T_{a, rece}}{(T_s - T_{a, rece})}}{\frac{T_{a, cald}}{(T_s - T_{a, cald})}} \quad (16)$$

sau

$$h_{reg, cald} = h_{reg, rece} \frac{\frac{T_{a, cald}}{(T_s - T_{a, cald})}}{\frac{T_{a, rece}}{(T_s - T_{a, rece})}} \quad (17)$$

Înlocuind valorile numerice indicate în enunțul problemei

$$\begin{cases} T_{a, rece} = 243 K \\ T_{a, cald} = 303 K \\ T_s = 673 K \\ h_{reg, rece} = 100 m \end{cases} \quad (18)$$

se obține valoarea numerică

$$h_{reg, calda} \cong 145 m \quad (19)^*$$

Relația (19) reprezintă răspunsul la punctul 1b).

1c) Trasează o schiță/ diagramă care să evidențieze modul în care variază viteza gazelor de-a lungul înălțimii coșului unui șemineu. Indică pe diagramă locul în care gazele intră din sobă în coș.

Conform ecuației de continuitate, debitul masic al gazelor rezultate din ardere este constant

$$\rho_s A v = const \quad (20)$$

Ținând cont de precizarea din enunțul problemei, anume că variația densității gazelor este neglijabilă în întregul șemineu și că secțiunea transversală a coșului este constantă

$$\begin{cases} \rho_s = const \\ A = const \end{cases} \quad (21)$$

se obține

$$v = const \quad (22)$$

Prin urmare viteza gazelor de-a lungul coșului este constantă și are expresia

$$v(z) = v(h) = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_a}}, \text{ pentru } 0 < z \leq h \quad (23)$$

Observație: Viteza $v(z)$ a gazelor are o discontinuitate la $z = 0$, unde are un salt de la valoarea 0 la

$$v(h) = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_a}}.$$

Reprezentarea grafică a dependenței $v = v(z)$ corespunzătoare vitezei gazelor de-a lungul coșului este prezentată în figura 4.

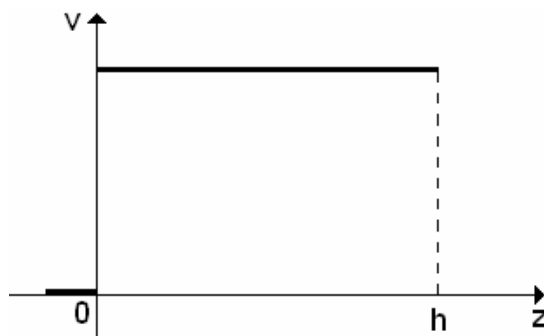


Figura 4. Reprezentarea grafică a dependenței $v = v(z)$

Gazele intră din sobă în coș la $z = 0$. Punctul este marcat pe diagramă prin litera O. Reprezentarea grafică din figura 4 este răspunsul pentru punctul 1c).

1d) Aplicând legea lui Bernoulli pentru gazele aflate zona de la baza coșului ($z = 0$) și pentru cele din zona situată la înălțimea z

$$0 + 0 + p_s(0) = \frac{\rho_s \cdot v^2(z)}{2} + \rho_s g z + p_s(z) \quad (24)$$

și ținând cont de relațiile (3) (5) se obține

$$p_s(z) = p_a(0) - g h (\rho_a - \rho_s) - \rho_s g z \quad (25)^*$$

Relația (25) evidențiază faptul că presiunea statică $p_s(z)$ a gazelor rezultate din ardere scade liniar în raport cu coordonata z a coșului șemineului.

Relația (25) reprezintă răspunsul la punctul 1d).

1.4.2 Soluție la sarcina de lucru 2

2a) Determină expresia randamentului centralei solare cu șemineu. Exprimă rezultatul în funcție de g , h , c și T_a .

Aplicând principiul fundamental al hidrostaticii pentru aerul rece, imobil din exteriorul centralei solare și utilizând notațiile din figura 5 se obține

$$p(0) = p(h) + \rho_{ar} g h \quad (26)$$

unde ρ_{ar} reprezintă densitatea aerului atmosferic rece, din exteriorul centralei solare cu șemineu.

Legea lui Bernoulli, aplicată pentru aerul cald, ce urcă prin coșul centralei solare cu șemineu are expresia

$$0 + 0 + p(0) = \frac{\rho_{ac} \cdot v^2}{2} + \rho_{ac} g h + p(h) \quad (27)$$

unde ρ_{ac} reprezintă densitatea aerului cald ce urcă prin coșul acestei centralei, iar v este viteza acestuia.

Combinând relațiile (26) și (27) se obține

$$v = \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_{ar}}{\rho_{ac}} - 1 \right)} \quad (28)$$

Densitatea aerului rece, aflat la temperatura T_a are expresia

$$\rho_{ar} = \frac{p(0) \cdot \mu_a}{R \cdot T_a} \quad (29)$$

iar densitatea aerului cald, aflat la temperatura $T_a + \Delta T'$ are expresia

$$\rho_{ac} = \frac{p(0) \cdot \mu_a}{R \cdot (T_a + \Delta T')} \quad (30)$$

Din relațiile (29) și (30) se obține

$$\frac{\rho_{ar}}{\rho_{ac}} = \frac{T_a + \Delta T'}{T_a} \quad (31)$$

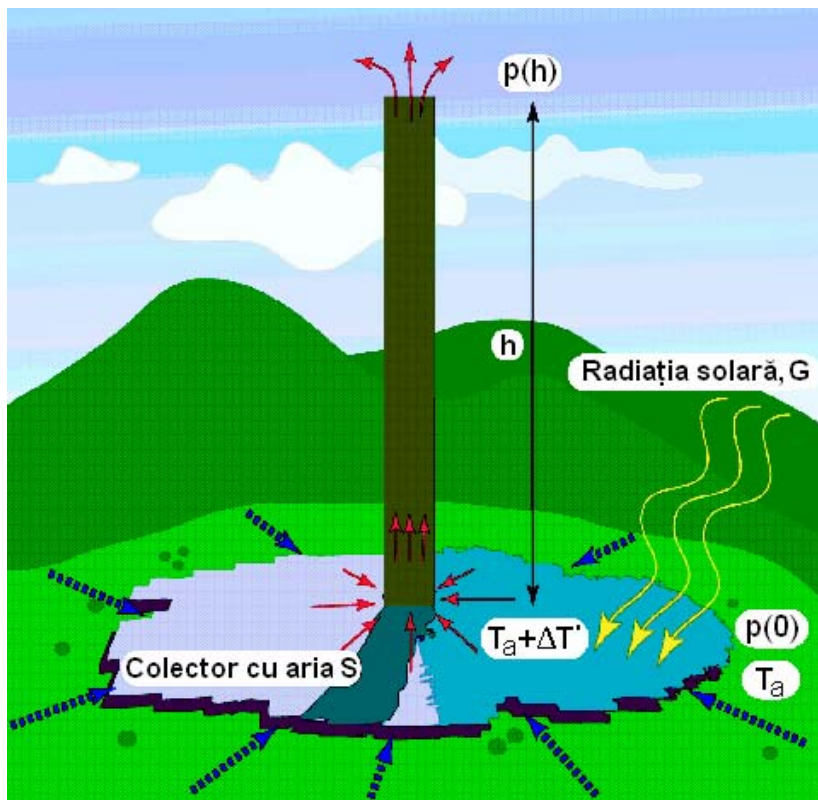


Figura 5. Schița centralei solare cu șemineu.

Substituind relația (31) în relația (28) se determină o altă expresie pentru viteza aerului cald ce urcă prin coșul centralei solare.

$$v = \sqrt{2gh \frac{\Delta T'}{T_a}} \quad (32)$$

Conform cu enunțul problemei randamentul acestui tip special de centrală solară este

$$\eta = \frac{E_{cin}}{E_{Soare}} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{GS\Delta\tau} \quad (33)$$

Întrucât se presupune că energia solară incidentă pe colector este utilizată în totalitate pentru încălzirea aerului din colector se poate scrie

$$GS\Delta\tau = mc\Delta T' \quad (34)$$

Combinând relațiile (32), (33) și (34) se obține expresia randamentului centralei solare

$$\eta = \frac{gh}{cT_a} \quad (35)^*$$

Relația (35) reprezintă răspunsul la punctul 2a).

2b) Trasează o diagramă care să ilustreze calitativ dependența randamentului centralei solare cu șemineu de înălțimea coșului.

Relația (35) evidențiază dependența $\eta(h) = \frac{g}{cT_a}h$ a randamentului centralei solare cu șemineu de

înălțimea h a coșului acesteia. Reprezentarea grafică din figura 6 ilustrează calitativ această dependență.

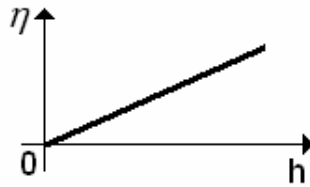


Figura 6. Reprezentarea grafică a dependenței $\eta = \eta(h)$

Diagrama din figura 6 constituie răspunsul pentru punctul 2b).

1.4.3 Soluție la sarcina de lucru 3

3a) Calculează randamentul centralei solare prototip de la Manzanares.

Utilizând relația (35) și valorile numerice indicate în enunț pentru prototipul centralei solare de la Manzanares

$$\begin{cases} g = 9,81 m \cdot s^{-2} \\ h = 195 m \\ c = 1012 J / (Kg \cdot K) \\ T_a = 295 K \end{cases} \quad (36)$$

se obține valoarea randamentului centralei solare prototip

$$\eta = 0,64\% \quad (37)^*$$

Relația (37) reprezintă răspunsul la punctul 3a).

3b) Determină valoarea numerică a puterii ce poate fi produsă cu ajutorul centralei solare prototip.

Expresia (33) a randamentului centralei solare cu șemineu poate fi scrisă sub forma

$$\eta = \frac{E_{cin}}{GS \Delta \tau} = \frac{P}{GS} \quad (38)$$

unde

$$P = \frac{E_{cin}}{\Delta \tau} \quad (39)$$

este puterea mecanică a jetului de aer cald din coșul centralei, adică puterea ce poate fi produsă cu ajutorul centralei solare prototip.

Din relația (38) se obține

$$P = \eta GS = \eta G \frac{\pi D^2}{4} \quad (40)$$

Utilizând valorile numerice

$$\begin{cases} D = 244 m \\ G = 150 W / m^2 \\ \eta = 0,64\% \end{cases} \quad (41)$$

se calculează valoarea puterii mecanice și se obține

$$P \cong 45 kW \quad (42)^*$$

Relația (42) reprezintă răspunsul la punctul 3b).

3c) Estimează valoarea energiei ce poate fi produsă de centrala solară prototip în timpul unei zile însorite tipice.

Conform relației (39) energia cinetică a jetului de aer cald din coșul centralei solare este

$$E_{cin} = P \Delta \tau \quad (43)$$

Pentru o zi însorită, tipică, se poate estima că intervalul de timp în care radiația solară încălzește aerul din colector este $\Delta \tau = 8 \text{ ore}$. Prin urmare valoarea energiei mecanice estimată a fi produsă în centrala solară prototip de la Manzanares este

$$E_{cin} \cong 360 \text{ kWh} \quad (44)^*$$

Relația (44) reprezintă răspunsul la punctul 3c).

1.4.4 Soluție la sarcina de lucru 4

4a) Determină expresia pentru creșterea de temperatură $\Delta T'$ a aerului, atunci când acesta trece din mediul înconjurător (cu aer rece) în coșul centralei (cu aer cald) și calculează-i valoarea numerică.

Relația (34) poate fi scrisă astfel

$$\begin{cases} GS \Delta \tau = \rho_{ac} A v \Delta \tau c \Delta T' \\ GS = \rho_{ac} A v c \Delta T' \end{cases} \quad (45)$$

Combinând relațiile (32) și (45) se obține

$$GS = \sqrt{2gh \frac{\Delta T'}{T_a}} \rho_{ac} A c \Delta T' \quad (46)$$

Creșterea de temperatură a aerului este

$$\Delta T' = \left(\frac{G^2 S^2 T_a}{\rho_{ac}^2 A^2 2ghc^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (47)$$

Utilizând notațiile din enunțul problemei relația (47) devine

$$\Delta T' = \frac{D}{2R} \left(\frac{G^2 D T_a}{\rho_{ac}^2 R 4ghc^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (48)^*$$

Folosind valorile numerice indicate pentru prototipul centralei solare de la Manzanares

$$\begin{cases} G = 150 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \\ D = 244 \text{ m} \\ T_a = 295 \text{ K} \\ R = 5 \text{ m} \\ \rho_{ac} = 0,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ h = 195 \text{ m} \\ c = 1012 \text{ J} / (\text{Kg} \cdot \text{K}) \end{cases} \quad (49)$$

se obține

$$\Delta T' \cong 9,1 \text{ K} \quad (50)^*$$

Relațiile (48) și (50) reprezintă răspunsul la punctul 4a).

4b) Calculează valoarea debitului masic al jetului de aer care circulă prin centrala solară cu șemineu de la Manzanares.

Utilizând relația (34) se poate deduce expresia debitului masic D_m al jetului de aer care urcă prin coșul centralei solare de la Manzanares

$$D_m = \frac{GS}{c \Delta T'} = \frac{G \pi D^2}{4 c \Delta T'} \quad (51)$$

Valoarea numerică a debitului masic al jetului de aer din centrală este

$$D_m \cong 765 \text{ kg / s} \quad (52)^*$$

Relația (52) reprezintă răspunsul la punctul 4b).

Soluție propusă de:

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare și Examinare – Ministerul Educației, Cercetării,
Tineretului și Sportului*

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București