

Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vranceanu – Procopiu"

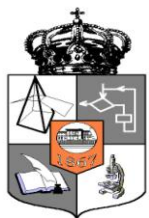
Ediția a XIV-a, 2012

Grilă de evaluare și de notare

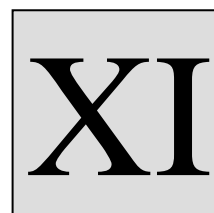
Orice altă rezolvare care conduce la rezultate corecte se va puncta corespunzător

Subiect	Parțial	Punctaj
<i>Problema I</i>		10 puncte
<p>a. Pentru: Considerăm un sistem de axe XOY cu originea în A (portul din care pleacă submarinul A). La momentul t distanța dintre nave este:</p> $D' = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2},$ <p>unde:</p> $x_{A'} = v_1 \cdot t \cdot \cos \alpha; x_{B'} = D - v_2 \cdot t \cdot \cos \beta$ $y_{A'} = v_1 \cdot t \cdot \sin \alpha; y_{B'} = v_2 \cdot t \cdot \sin \beta$ $t_{\min} = D \cdot \frac{v_1 \cdot \cos \alpha + v_2 \cdot \cos \beta}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha + \beta)}$ $D'_{\min} = D \cdot \frac{v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha + \beta)}}$	<p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p>	2 puncte
<p>b. Pentru: $x = x_1 + x_2$</p> <p>unde:</p> $x_2 = \frac{v^2 \cdot \sin 2\delta}{g}$ <p>Avem x_{\max} pentru $x_1 = \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{2}$ și $\delta = \frac{\pi}{4}$ rad</p> $x_{\max} = \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{2} + \frac{v^2}{g}$	<p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p>	2 puncte

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI
SPORTULUI



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

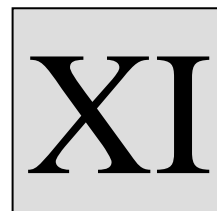
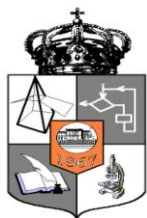


Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XIV-a, 2012

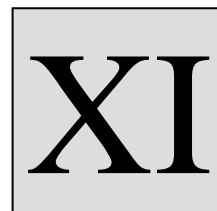
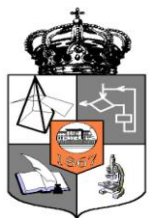
<p>c. Pentru:</p> $x_1' = -\infty$ $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f}$ $\frac{1}{x_2''} - \frac{1}{x_1''} = \frac{1}{f}$ $d = x_2'' - x_2' = \left -\frac{f^2}{f + x_1''} \right $	<p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p>	<p>1 punct</p>
<p>d. Pentru:</p> $\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = 1 - \frac{ Q_{ced} }{Q_{abs}}$ $Q_{ced} = \nu \cdot C_V (T_1 - T_4); Q_{abs} = \nu \cdot C_p (T_3 - T_2)$ $T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{\gamma-1}; T_3 = T_1 \cdot \sigma \cdot \varepsilon^{\gamma-1}; T_4 = T_1 \cdot \sigma^{\gamma}$ $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \cdot \frac{\sigma^{\gamma} - 1}{\sigma - 1}$	<p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p> <p>0,50 p</p>	<p>2 puncte</p>
<p>e. Pentru:</p> <p>i) B₁, B₂, B₃ și B₄</p> <p>ii) B₄</p> <p>iii) B₂</p> <p>iv) B₂, B₃ și B₄</p> <p>v) B₁ și B₂</p> <p>vi) B₁ și B₄</p> <p>vii) B₂, B₃ și B₄</p> <p>viii) B₁, B₂, B₃ și B₄</p>	<p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p> <p>0,25 p</p>	<p>2 punct</p>
Oficiu		1 punct



Concursul Național de Matematică și Fizică
"Vranceanu – Procopiu"

Ediția a XIV-a, 2012

Subiect	Parțial	Punctaj
<i>Problema II</i>		10 puncte
a)		3 puncte
<p>Dacă mișcarea sferei este apreciată ca fiind o mișcare circulară neuniformă, în momentul trecerii ei prin poziția inferioară (desenul a, fig. 1) avem:</p> <div style="text-align: center;"> $v_{\max} = \omega_{\max} L.$ <p>Fig. 1</p> </div>	1,00 p	
<p>Dacă mișcarea sferei este apreciată ca fiind o mișcare oscilatorie armonică, avem:</p> $y = y_{\max} \sin \omega t,$ <p>unde ω este pulsația oscilațiilor armonice:</p> $\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad y_{\max} \approx \alpha_{\max} L;$ $v = v_{\max} \cos \omega t;$ $v_{\max} = \omega A = \omega y_{\max}.$	1,00 p	
<p>În aceste condiții, din relațiile anterioare, rezultă:</p> $\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} \alpha_{\max},$ <p>reprezentând relația dintre mărimile caracteristice mișcării unui pendul fizic, atunci când acesta efectuează oscilații armonice mici.</p>	1,00 p	

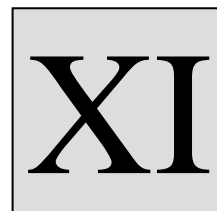
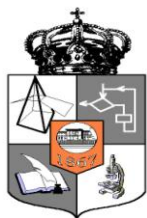


Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vranceanu – Procopiu"

Ediția a XIV-a, 2012

b)		3 puncte
<p>În desenul <i>b</i> din figura 1 este reprezentat un pendul conic, cu lungimea L și cu deschiderea semiunghiulară α_0 foarte mică.</p> <p>Mișcarea sferei suspendată de fir (tijă) fiind circulară uniformă, înseamnă că:</p> $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp};$ $T \sin \alpha_0 = \frac{mv^2}{r} \approx T \alpha_0;$ $T \cos \alpha_0 = mg \approx T;$ $r = L \sin \alpha_0 \approx L \alpha_0;$ $v^2 = g L \alpha_0^2.$	1,00 p	
<p>În desenul <i>c</i> din figura 1 este reprezentat pendulul matematic inițial, eliberat din poziția extremă laterală cu deviația unghiulară α_0 foarte mică, astfel încât, atunci când trece prin poziția de echilibru să avem:</p> $\frac{mv_0^2}{2} = mgL(1 - \cos \alpha_0);$ $1 - \cos \alpha_0 = 2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0^2}{2};$ $v_0^2 = g L \alpha_0^2 = v^2.$	1,00 p	
<p>Concluzie: intervenția asupra pendulului matematic, într-una din pozițiile sale laterale extreme, imprimându-i acolo viteza \vec{v}_0, perpendiculară pe planul oscilațiilor și egală cu aceea din timpul oscilațiilor, corespunzătoare poziției de echilibru, transformă pendulul matematic într-un pendul conic.</p> <p>Sfera pendulului conic revine în poziția inițială, după timpul:</p> $T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi v_0}{g \alpha_0}.$	1,00 p	
c)		3 puncte
<p>În acord cu teorema conservării energiei mecanice, corespunzător celor două stări ale pendulului fizic dat, reprezentate în</p>		



Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vranceanu – Procopiu"

Ediția a XIV-a, 2012

figura 2:

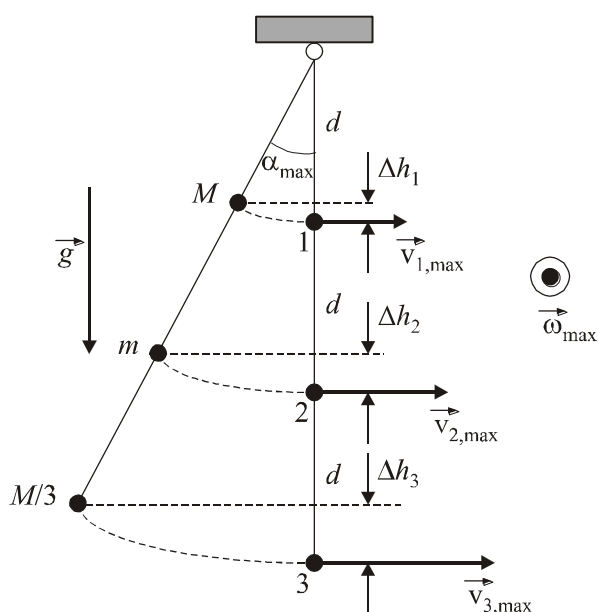


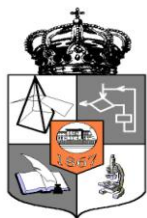
Fig. 2

1,00 p

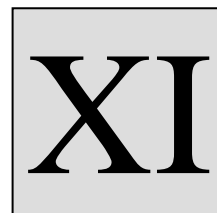
$$\begin{aligned} \frac{M}{3} g \Delta h_3 + m g \Delta h_2 + M g \Delta h_1 &= \frac{\frac{M}{3} v_{3,\max}^2}{2} + \\ &+ \frac{m v_{2,\max}^2}{2} + \frac{M v_{1,\max}^2}{2}; \\ \frac{M}{3} g 3d(1 - \cos \alpha_{\max}) + m g 2d(1 - \cos \alpha_{\max}) + \\ &+ M g d(1 - \cos \alpha_{\max}) = \frac{M}{6} (\omega_{\max} 3d)^2 + \\ &+ \frac{m}{2} (\omega_{\max} 2d)^2 + \frac{M}{2} (\omega_{\max} d)^2; \\ 1 - \cos \alpha_{\max} &= 2 \sin^2 \frac{\alpha_{\max}}{2} \approx \frac{\alpha_{\max}^2}{2}; \\ (M + m) g d \alpha_{\max}^2 &= 2(M + m) d^2 \omega_{\max}^2; \end{aligned}$$

1,00 p

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI
SPORTULUI



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU



Concursul Național de Matematică și Fizică

"Vranceanu – Procopiu"

Ediția a XIV-a, 2012

$\omega_{\max}^2 = \frac{g}{2d} \alpha_{\max}^2;$ $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{2d}} \alpha_{\max},$ <p>unde ω_{\max} este viteza unghiulară maximă în mișcarea de rotație a sistemului, ca urmare a eliberării acestuia dintr-o poziție careia îi corespunde o deviație unghiulară foarte mică, α_{\max}.</p>		
<p>Concluzie: relația dintre ω_{\max} și α_{\max} stabilită anterior, în condițiile precizate, dovedește că mișcarea oscilatorie a pendulului fizic dat este armonică.</p>	0,50 p	
<p>Rezultă:</p> $\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} \alpha_{\max};$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{2d}{g}},$ <p>relație independentă de masele punctelor materiale ale pendulului fizic. Pendulul fizic dat este echivalent cu un pendul matematic având lungimea $2d$.</p>	0,50 p	
Oficiu		1 p