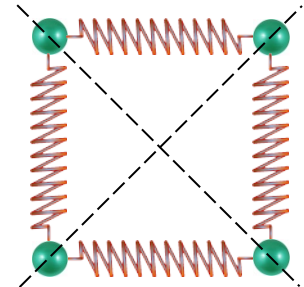




Oscilații simetrice

Bilele identice (de masă m fiecare) din figură se află în repaus pe o suprafață orizontală fără frecări, în vârfurile unui pătrat. Ele sunt legate prin resorturi identice, având constantă de elasticitate k și masă neglijabilă. Bilele sunt deplasate simetric de-a lungul diagonalelor pătratului și eliberate simultan din repaus. Pentru această deformare se cheltuiește energia totală W .



a) Arată că mișcarea unei bile este oscilatorie armonică și scrie legea de mișcare a acesteia.

b) Determină frecvența oscilațiilor simetrice generalizând pentru un sistem de forma unui poligon regulat cu n laturi, având bile în vârfuri și resorturi pe laturi.

c) Calculează frecvența oscilațiilor simetrice ale unui sistem de bile identice aflate în vârfurile unui tetraedru regulat, legate între ele prin resorturi identice aflate de-a lungul muchiilor tetraedrului. Sistemul este situat în spațiul cosmic, în absența gravitației.

Soluție și barem de notare:

a) Forța de revenire ce acționează asupra unei bile este:

$$R = 2 \cdot F \cdot \cos \frac{\pi}{4} = F \cdot \sqrt{2}$$

unde forța elastică din resort este:

$$F = k \cdot \Delta l$$

Legătura dintre elongația bilei și alungirea resortului este:

$$\frac{\Delta l}{2} = y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \Delta l = y \cdot \sqrt{2}$$

Forța de revenire este de tip elastic:

$$R = 2 \cdot k \cdot y \Rightarrow R \sim y$$

adică oscilația este armonică.

Legea mișcării oscilatorii are forma

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Energia cheltuită în timpul deformării sistemului se regăsește în energiile potențiale ale celor 4 resorturi.

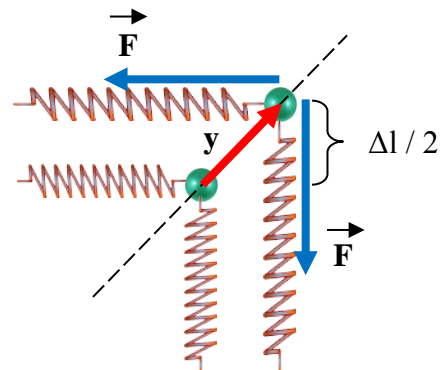
$$W = 4 \cdot \frac{k \cdot \Delta l_{\max}^2}{2}$$

$$\Delta l_{\max} = A \cdot \sqrt{2} \Rightarrow W = 4 \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{W}{k}} \quad \dots 1p$$

În momentul eliberării bilelor avem:

$$t = 0, y = \pm A \Rightarrow \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \dots 1p$$

Constanta elastică a unui oscilator este:





Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean Bacău
COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I”, BACĂU
Concursul Național de Matematică și Fizică
„Vrănceanu-Procopiu”
Ediția a XIV-a, 2012

XIII

pagina 2 din 2

$$k_{osc} = 2 \cdot k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}} \quad \dots 1p$$

Legea de mișcare a unei bile este:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{W}{k}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}} \cdot t \pm \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots 0,5p$$

b) Notăm cu α unghiul sub care se vede o latură a poligonului din centrul acestuia.

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n} \text{ rad}$$

Forța de revenire este:

$$R = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Relația dintre deformația unui resort și elongație este:

$$\Delta l = 2 \cdot y \cdot \sin \frac{\pi}{n} \quad \dots 1p$$

Forța de revenire se scrie:

$$R = 4 \cdot k \cdot y \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} \Rightarrow k_{osc} = 4 \cdot k \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} \quad \dots 1p$$

Frecvența de oscilație a unei bile este:

$$\nu = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots 0,5 p$$

c) Notăm cu α unghiul dintre o muchie a tetraedrului și înălțimea tetraedrului ce conține un capăt al muchiei.

Forța de revenire ce acționează asupra unei bile este:

$$R = 3 \cdot F \cdot \cos \alpha$$

Relația dintre deformația unui resort și elongația unei bile este:

$$\Delta l = 2 \cdot y \cdot \cos \alpha \quad \dots 0,5p$$

Forța de revenire devine:

$$R = 6 \cdot k \cdot y \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow k_{osc} = 6 \cdot k \cdot \cos^2 \alpha \quad \dots 0,5 p$$

Pentru tetraedrul regulat:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots 0,5p$$

Pentru cub:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \dots 0,5p$$

Din oficiu:

...1p

Total:

...10p