



**MINISTERUL EDUCAȚIEI, NAȚIONALE**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU**  
**COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I” BACĂU**  
**Concursul Național de Matematică și Fizică**  
**„Vrânceanu – Procopiu”**

XI

**Subiectul 1.**

**Ediția a XV –a, 2013**

**Soluție:**

Pentru o comprimare suplimentară cu  $D/2$  a resorturilor, prin introducerea bețișorului avem:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{D}{2\Delta l} = \frac{d_1}{\Delta l} = 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,5\%!$$

1p

Acest lucru ne permite să considerăm că pe distanța de 0,5 mm dar și pe ulterioarele distanțe, mai mici că forța practic este constantă, deci și accelerația bilelor va fi practic constantă până în momentul opririi lor definitive. Primul set de evenimente durează  $T_1$  secunde și este compus din durată sosirii unei bile la locul de coliziune plus durată coliziunii plus durată revenirii la cea mai mare distanță de punctul de impact:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{a}} + n \sqrt{\frac{2d_1}{a}} + \sqrt{e} \cdot \sqrt{\frac{2d_1}{a}} = (1 + n + \sqrt{e}) \cdot \sqrt{\frac{2d_1}{a}}$$

1p

unde  $d_1 = \frac{D}{2}$ , iar viteza după coliziune este

$$v'_1 = v_1 \cdot \sqrt{e},$$

1p

având în vedere definirea coeficientului de restituire pentru energia cinetică.

Pentru al doilea eveniment similar vom avea:

$$T_2 = \sqrt{e} \cdot (1 + n + \sqrt{e}) \cdot \sqrt{\frac{2d_1}{a}}$$

Și tot așa până la:

$$T_n = (\sqrt{e})^{n-1} \cdot (1 + n + \sqrt{e}) \cdot \sqrt{\frac{2d_1}{a}}$$

1p

Suma timpilor are expresia:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = (1 + n + \sqrt{e}) \sqrt{\frac{2d_1}{a}} (1 + \sqrt{e} + (\sqrt{e})^2 + \dots + (\sqrt{e})^{n-1})$$

1p

Efectuând suma progresiei geometrice vom avea:

$$T = \frac{(1+n+\sqrt{e})[(\sqrt{e})^n - 1]}{\sqrt{e} - 1} \sqrt{\frac{2d_1}{a}}$$

1p

Pentru un număr foarte mare de ciocniri ( $n \rightarrow \infty$ ) se obține:

$$T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(1+n+\sqrt{e})[(\sqrt{e})^n - 1]}{\sqrt{e} - 1} \sqrt{\frac{2d_1}{a}} \right] = \frac{1+n+\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} \sqrt{\frac{2d_1}{a}}$$

1p

Înlocuind accelerația cu:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{k\Delta l}{m}$$

$$\text{Obținem: } T_\infty = \frac{1+n+\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} \sqrt{\frac{mD}{k\Delta l}}$$

1p

$$\text{Numeric, } T_\infty = 2,945 \text{ s.}$$

1p

Se vede că  $T_{i+1} < T_i$ , adică frecvența ciocnirilor crește, de aici și senzația de "sunet" mai acut. 1p

Din oficiu 1p. Total 10p.

**Subiectul 2. A. Soluție:**

a) Pentru graficele cu linii subțiri avem evident:

$$y_{1,2} = A_{1,2} \cdot \sin(\omega_{1,2} \cdot t + \varphi_{0,1,2}),$$

unde indicele 1 se referă la linia subțire continuă iar indicele 2 este pentru linia punctată.

Citind cu atenție datele cuprinse în grafice vom observa că:



**MINISTERUL EDUCAȚIEI, NAȚIONALE**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU**  
**COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I” BACĂU**  
**Concursul Național de Matematică și Fizică**  
**„Vrănceanu – Procopiu”**

XI

**Ediția a XV –a, 2013**

$$\varphi_{01} = 0, T_1 = 1s, \text{ deci } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi s^{-1}, A_1 = A = 0,1m, \text{ iar } y_1 = 0,1 \sin 2\pi t (m) \quad 1p$$

Respectiv:  $\varphi_{02} = \pi, T_2 = 1,25s, \text{ deci } \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 1,6\pi s^{-1},$

$$A_2 = A = 0,1m, \text{ iar } y_2 = 0,1 \sin (1,6\pi t + \pi) (m) \quad 1p$$

b) Se observă că sunt oscilații paralele de aceeași amplitudine și de frecvențe apropiate. Considerând fazele  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  argumentele funcțiilor sinus, prin suprapunerea și compunerea celor două oscilații rezultă (vezi graficul trasat cu linie mai groasă):

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad 1p$$

Efectuând calculele, obținem:

$$y = 0,2 \cos (0,2\pi t - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin (1,8\pi t + \frac{\pi}{2}) (m) . \quad 1p$$

Se vede că amplitudinea rezultantă variază lent în timp – fenomen denumit ”bătăi”.

$$\text{Avem, prin calcul: } T_{\text{bătăi}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{bătăi}}} = 10s, T_{\text{osc}} = 1,1s.$$

Datele din grafice confirmă aceste valori. 1p

B. Soluție:

Se observă că resortul agățat de bețișorul de bambus poate oscila dacă este excitat, fără să se agațe de el vreun alt corp. Aceasta înseamnă ca are masă semnificativă și se determină perioada de oscilație, ca prim rezultat al determinărilor. ...

Se determină experimental perioada de oscilație pentru diferite mase agățate de resort.

Pentru diferite mase de sumă **m** agățate de resort, perioada lui de oscilație este dată de relația:

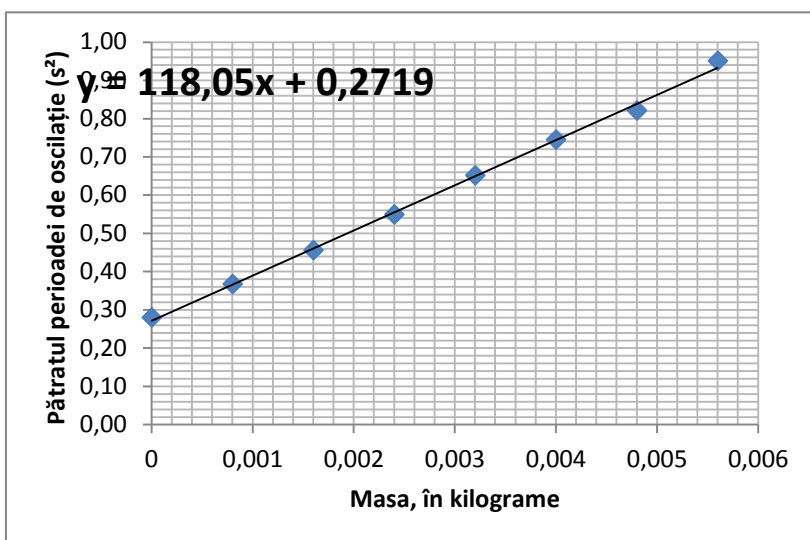
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_0}{k}}, \quad 1p$$

unde  $m_0$  este o treime din masa resortului (conform teoriei).

Reprezentăm grafic pătratul perioadei în funcție de masa totală agățată de resort, deoarece această dependență ne permite să determinăm cele solicitate. Din calcul rezultă:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m_0 + \frac{4\pi^2}{k} m \quad 1p$$

T(s)	m (kg)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )
0,529	0	0,2798
0,606	0,0008	0,3672
0,675	0,0016	0,4556
0,741	0,0024	0,5491
0,807	0,0032	0,6512
0,863	0,004	0,7448
0,906	0,0048	0,8208
0,975	0,0056	0,9506



Se observă că graficul este aproximativ o dreaptă. Din acesta măsurăm panta graficului și ordonata la origine și scriem:

$$T^2 = 0,2719 + 118,5 m. \quad 1p$$

Comparând cele două expresii pentru  $T^2$ , aflăm:

$$m_0 = 1,832 \text{ g}, k = 0,3328 \text{ N/m}. \quad 1p.$$

Din oficiu 1p.  
Total: 10p.