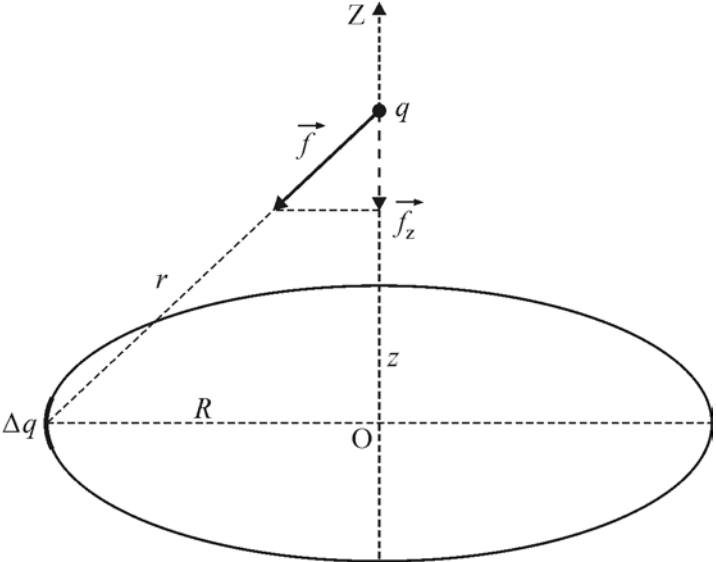


Baraj, Problema 3, Oscilații armonice, Barem de evaluare

Problema 1	Parțial	Punctaj
		10 p
a)		3 p
<p>Când corpul cu sarcina q se află, pe axul inelului, la distanța z față de centrul acestuia (fig. 1), forța de natură electrostatică ce acționează asupra sa din partea unui element de arc cu lungimea Δl, electrizat cu sarcina Δq, este:</p>  <p style="text-align: center;">Fig. 1</p> $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\Delta q}{r^2}; \quad \Delta q = Q \frac{\Delta l}{2\pi R};$ $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ\Delta l}{2\pi R(R^2 + z^2)},$ <p>a cărei componentă de-a lungul axei OZ este:</p> $f_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ\Delta l}{2\pi R(R^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}};$ $z \ll R; \quad f_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQz}{2\pi R^4} \Delta l.$ <p>Ca urmare a interacțiunii cu sarcina electrică a întregului inel, forța care acționează asupra corpului cu sarcina q, de-a lungul axei OZ este:</p> $F_z = \Sigma f_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} z; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3};$ $F_z = kz; \quad \vec{F}_z = -k\vec{z}.$ <p><i>Concluzie:</i> oscilațiile mici ale corpului cu sarcina q, executate de-a</p>		

lungul axului perpendicular pe planul inelului, în centrul acestuia, sunt oscilații armonice.

Rezultă:

$$k = m\omega^2; \quad T = 4\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m R}{qQ}}.$$

b)

3 p

Când corpul punctiform, electrizat cu sarcina q , se află în planul inelului, la distanța x față de centrul inelului (fig. 2), forța de natură electrostatică ce acționează asupra sa din partea unui element de arc cu lungimea Δl , electrizat cu sarcina Δq , este:

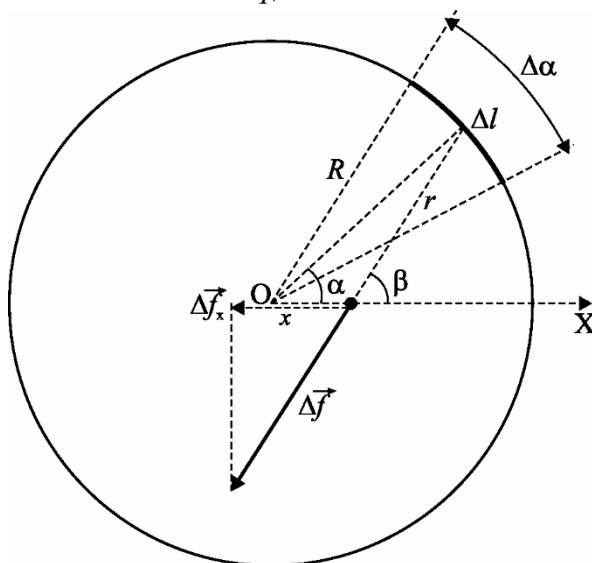


Fig. 2

$$\Delta f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\Delta q}{r^2}; \quad \Delta q = Q \frac{\Delta l}{2\pi R} = \frac{Q}{2\pi} \Delta\alpha;$$

$$\Delta f = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{qQ\Delta\alpha}{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\alpha},$$

a cărei componentă de-a lungul axei OX este:

$$\Delta f_x = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{qQ\cos\beta \Delta\alpha}{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\alpha};$$

$$x \ll R; \quad \alpha \approx \beta; \quad \Delta\alpha \approx \Delta\beta;$$

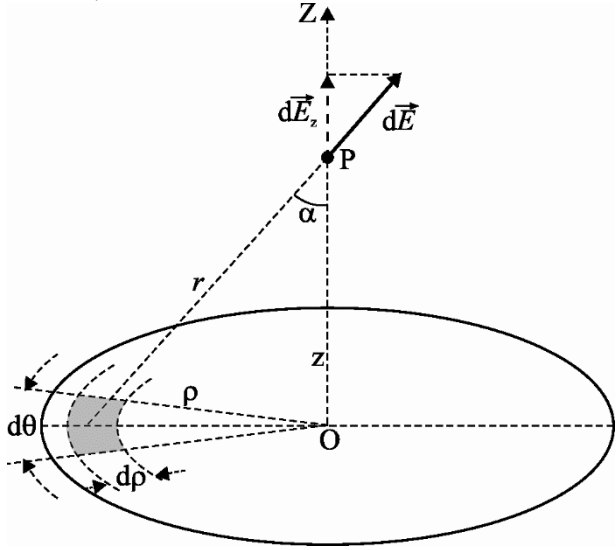
$$\Delta f_x = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{qQ\cos\beta \Delta\beta}{R^2 - 2Rx\cos\beta};$$

$$\Delta f_x = \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos\beta \left(1 - \frac{2x\cos\beta}{R}\right)^{-1} \Delta\beta;$$

$$\Delta f_x \approx \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0} \left(1 + \frac{2x\cos\beta}{R}\right) \Delta\beta.$$

Ca urmare a interacțiunii cu sarcina electrică a întregului inel, forța care acționează asupra corpului cu sarcina q , de-a lungul axei OX, este:

$$F_x = \int_0^{2\pi} df_x = \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2x\cos\beta}{R}\right) \cos\beta d\beta;$$

$F_x = \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \cos\beta \, d\beta + \frac{qQx}{4\pi^2\epsilon_0 R^3} \int_0^{2\pi} \cos^2\beta \, d\beta$ $\int \cos\beta \, d\beta = \sin\beta; \quad \int \cos^2\beta \, d\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4};$ $F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} x; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3};$ $F_x = kx; \quad \vec{F}_x = -k\vec{x}.$ <p><i>Concluzie:</i> oscilațiile mici ale corpului cu sarcina q, executate de-a lungul diametrului inelului, sunt oscilații armonice.</p> <p>Rezultă:</p> $k = m\omega^2; \quad T = 4\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m R}{qQ}}.$		
c)		3 p
<p>Un sector elementar de pe suprafața discului, delimitat așa cum indică figura 3, având aria suprafeței dS și sarcina electrică dq, generează un câmp electric a căru intensitate, într-un punct de pe axul discului, la distanța z față de centrul discului, este:</p>  <p style="text-align: center;">Fig. 3</p> $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}; \quad dq = \frac{Q}{\pi R^2} dS;$ $dS = \rho \, d\theta \, d\rho; \quad r^2 = \rho^2 + z^2;$ $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \frac{\rho \, d\theta \, d\rho}{\rho^2 + z^2},$ <p>a cărei componentă de-a lungul axei OZ este:</p> $dE_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{z\rho \, d\rho \, d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$ <p>Ca urmare, intensitatea câmpului rezultat în punctul P, cu orientarea de-a lungul axei OZ, este:</p>		

$$E_z = \int dE_z = \frac{zQ}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\int \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}};$$

$$E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

La mijlocul distanței dintre cele două discuri, pe axa comună a acestora, intensitatea câmpului rezultat este nulă. În figura 4 am reprezentat corpul punctiform, electrizat cu sarcina q , deplasat pe distanța Δz față de poziția de echilibru. În aceste condiții forța rezultantă care acționează asupra sa este:

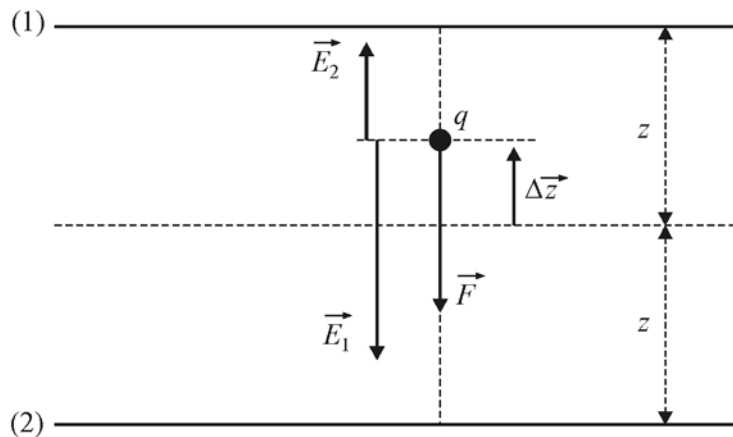


Fig. 4

$$F = q(E_1 - E_2);$$

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z - \Delta z}{\sqrt{R^2 + (z - \Delta z)^2}} \right];$$

$$E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z + \Delta z}{\sqrt{R^2 + (z + \Delta z)^2}} \right];$$

$$z \ll R; \quad z - \Delta z \ll R; \quad z + \Delta z \ll R;$$

$$E_1 \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z - \Delta z}{R} \right);$$

$$E_2 \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z + \Delta z}{R} \right);$$

$$F = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 R^3} \Delta z; \quad k = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 R^3}; \quad F = k\Delta z; \quad \vec{F} = -k\Delta\vec{z}.$$

Concluzie: oscilațiile mici ale corpului punctiform sunt armonice, perioada lor fiind:

$$k = m\omega^2; \quad T = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m R}{qQ}}.$$

