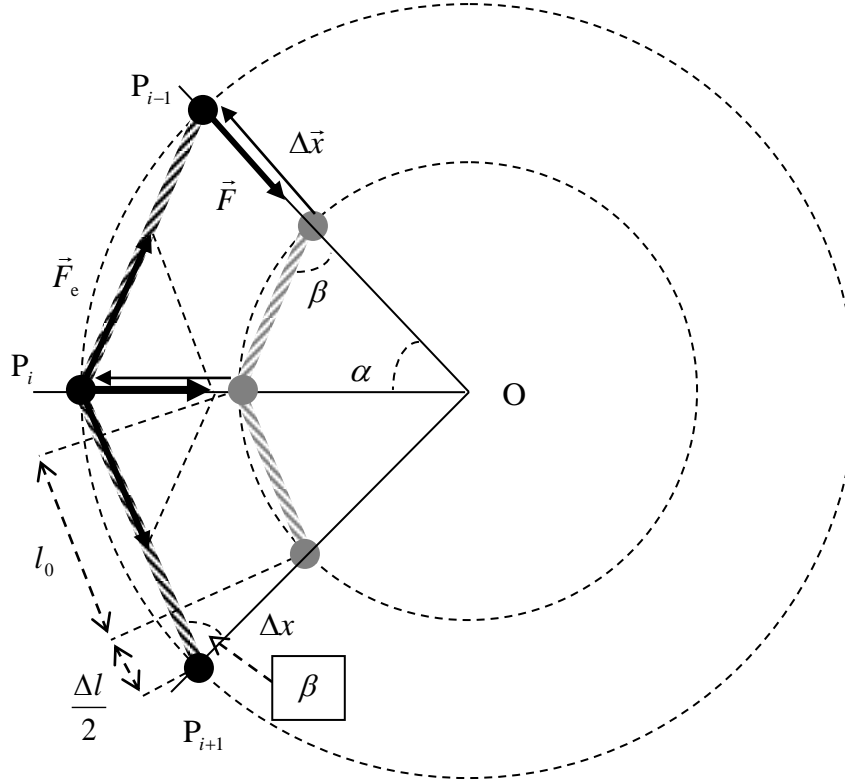


Clasa a XI-a
Problema 2
Rezolvare

a) (3p) Utilizând figura alăturată, în care pendulele P_i , P_{i-1} și P_{i+1} sunt deplasate din poziția de echilibru, de-a lungul fiecărei spițe, vectorul elongație fiind $\Delta\vec{x}$, iar alungirea fiecărui resort fiind Δl , rezultă:



$$\alpha = \frac{2\pi}{n}; \alpha + 2\beta = \pi; 2\beta = \pi - \alpha;$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \cos \beta \Delta x; \Delta l = 2 \cos \beta \Delta x;$$

$$F_e = k\Delta l = 2k \cos \beta \Delta x,$$

astfel încât forța care determină revenirea fiecărei bile spre poziția de echilibru este:

$$F = 2F_e \cos \beta = 4k \cos^2 \beta \Delta x;$$

$$F = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right) \Delta x;$$

$$K = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right);$$

$$F = K \Delta x; \vec{F} = -K \Delta\vec{x},$$

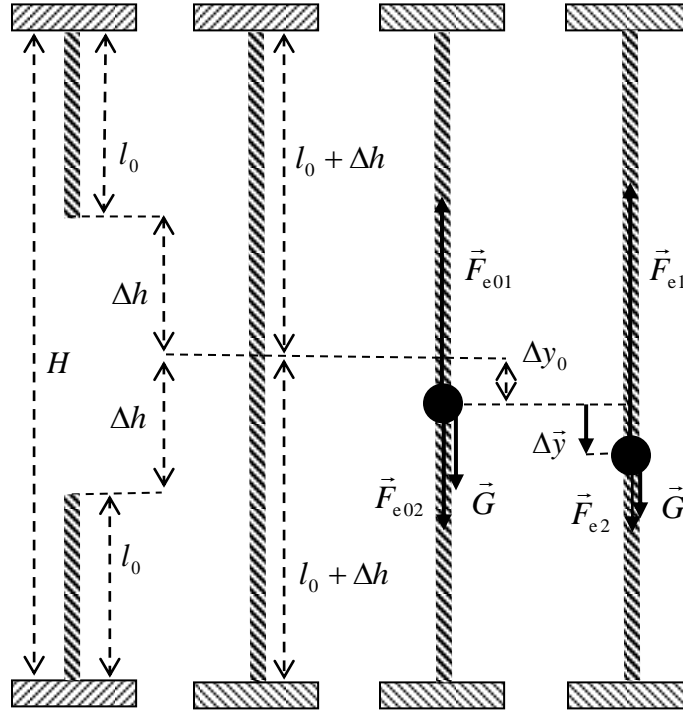
ceea ce dovedește că oscilațiile sunt armonice;

$$K = 4k \cos^2 \left(\frac{(n-2)\pi}{2n} \right) = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\cos \frac{(n-2)\pi}{2n}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

b) (3p)

1) Pentru oscilațiile verticale mici ale bilei, considerând că cele două resorturi sunt permanent deformatе prin întindere, utilizând secvențele din figura alăturată, rezultă:



$$2l_0 + 2\Delta h = H;$$

$$\Delta h = \frac{H - 2l_0}{2} = \frac{H}{2} - l_0;$$

$$\vec{F}_{e01} + \vec{F}_{e02} + \vec{G} = 0;$$

$$k(\Delta h + \Delta y_0) = k(\Delta h - \Delta y_0) + mg;$$

$$\Delta y_0 = \frac{mg}{2k};$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} + \vec{G};$$

$$F = F_{e1} - F_{e2} - G;$$

$$F = k(\Delta h + \Delta y_0 + \Delta y) - k(\Delta h - \Delta y_0 - \Delta y) - mg;$$

$$F = k(\Delta h + \Delta y_0) - k(\Delta h - \Delta y_0) - mg + 2k\Delta y;$$

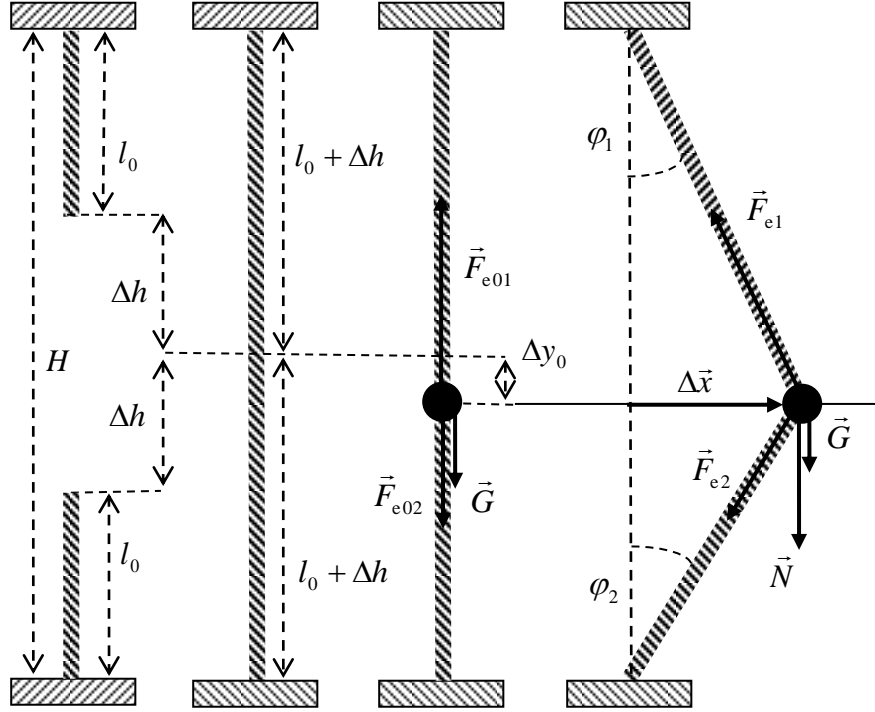
$$F = 2k\Delta y; \quad 2k = k_0; \quad F = k_0\Delta y;$$

$$\vec{F} = -2k\Delta\vec{y}; \quad \vec{F} = -k_0\Delta\vec{y},$$

ceea ce dovedește caracterul armonic al oscilațiilor bilei;

$$k_{01} = m\omega_1^2 = m \frac{4\pi^2}{T_1^2}; T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{01}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

2) Pentru oscilațiile laterale orizontale mici, utilizând figura alăturată, rezultă:



$$F_{e1} \approx F_{e01} = k(\Delta h + \Delta y_0);$$

$$F_{e2} \approx F_{e02} = k(\Delta h - \Delta y_0);$$

$$F = F_{e1} \sin \varphi_1 + F_{e2} \sin \varphi_2;$$

$$F \approx F_{e1} \tan \varphi_1 + F_{e2} \tan \varphi_2;$$

$$F = k(\Delta h + \Delta y_0) \frac{\Delta x}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + k(\Delta h - \Delta y_0) \frac{\Delta x}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0};$$

$$F = k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right) \Delta x;$$

$$k_{02} = k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right);$$

$$F = k_{02} \Delta x; \vec{F} = -k_{02} \vec{\Delta x},$$

ceea ce dovedește că oscilațiile laterale orizontale mici sunt oscilații armonice;

$$k_{02} = m\omega_2^2 = m \frac{4\pi^2}{T_2^2};$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{02}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \left(\frac{\Delta h + \Delta y_0}{l_0 + \Delta h + \Delta y_0} + \frac{\Delta h - \Delta y_0}{l_0 + \Delta h - \Delta y_0} \right)}};$$

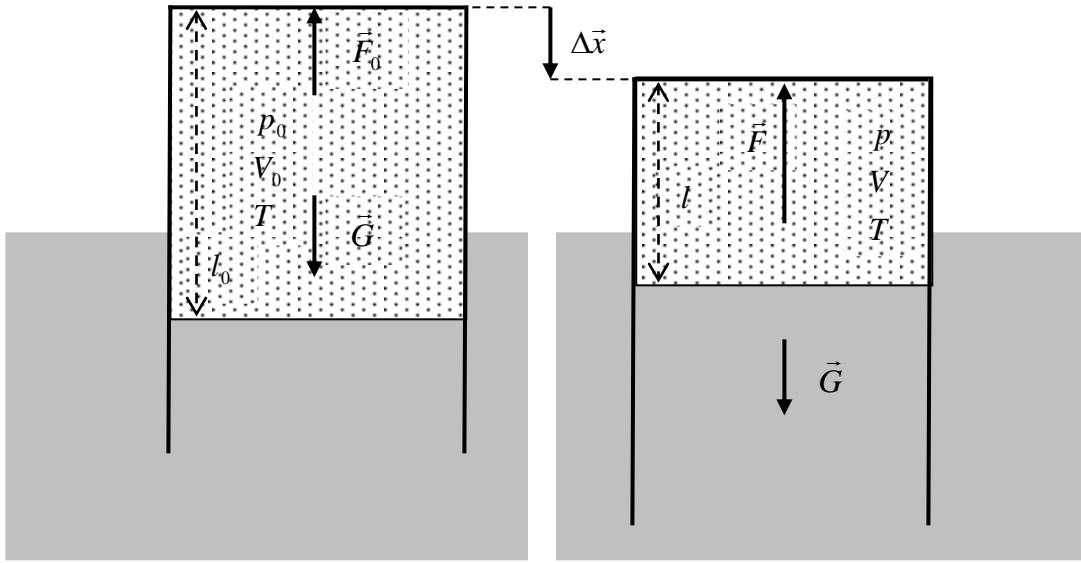
$$\Delta h = \frac{H}{2} - l_0; \quad \Delta y_0 = \frac{mg}{2k}.$$

c) (3p) Corespunzător secvențelor din figura alăturată, rezultă:

$$F_0 = mg; \quad p_0 S = mg; \quad p_0 = \frac{mg}{S};$$

$$p_0 V_0 = pV; \quad p = p_0 \frac{V_0}{V} = \frac{mg}{S} \frac{l_0}{l};$$

$$F = pS = mg \frac{l_0}{l}; \quad l = l_0 - \Delta x;$$



$$F = mg \frac{l_0}{l_0 - \Delta x} = mg \frac{l_0}{l_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{l_0} \right)} = mg \left(1 - \frac{\Delta x}{l_0} \right)^{-1};$$

$$F \approx mg \left(1 + \frac{\Delta x}{l_0} \right); \quad \vec{R} = \vec{F} + \vec{G}; \quad R = F - G;$$

$$R = mg \left(1 + \frac{\Delta x}{l_0} \right) - mg; \quad R = \frac{mg}{l_0} \Delta x; \quad k = \frac{mg}{l_0};$$

$$R = k\Delta x; \quad \vec{R} = -k\Delta \vec{x},$$

ceea ce dovedește că oscilațiile paharului sunt oscilații armonice;

$$k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg}{l_0}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$