



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
„Vrănceanu – Procopiu”
Ediția a XVI –a, 2014

IX

Problema I (10 puncte)

Se consideră numerele reale strict pozitive a, b și c astfel încât $a \leq b \leq c, b \neq 1$ și $a + b + c = abc + 2$.

a) Arătați că numerele $1 - ab, 1 - bc$ și $1 - ca$ au același semn.

b) Dacă n este un număr natural oarecare, demonstrați că numerele $1 - ab^n c$ și $1 - b$ au același semn.

Vasile Cârtoaje

Soluție.

a) Deoarece $(1 - ab)(1 - bc) = 1 - ab - bc + b(a + b + c - 2) = (b - 1)^2 > 0$, numerele $1 - ab$ și $1 - bc$ au același semn.

Analog se arată că numerele $1 - ab$ și $1 - ca$ au același semn. **(3p)**

b) Dacă $b < 1$, atunci $a < 1$, deci $1 - ab > 0$. Conform punctului a), rezultă că $1 - ca > 0$. Rezultă că $1 - ab^n c > 1 - a \cdot 1 \cdot c > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare numerele $1 - ab^n c$ și $1 - b$ sunt, ambele, pozitive. **(3p)**

Dacă $b > 1$, atunci $c > 1$, deci $1 - bc < 0$. Conform punctului a), rezultă că $1 - ca < 0$. Rezultă că $1 - ab^n c < 1 - a \cdot 1 \cdot c < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare numerele $1 - ab^n c$ și $1 - b$ sunt, ambele, negative. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Determinați numerele naturale n pentru care există numere reale pozitive x și y astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ și $\sqrt{x+n} + \sqrt{y+n} \in \mathbb{N}$.

Marius Ghergu

Soluție.

Notăm $k = \sqrt{x+n} + \sqrt{y+n}, k \in \mathbb{N}$. Dacă $x = y$, atunci $x = y = 1$ și, deoarece $k = 2\sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $n = p^2 - 1$, cu $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. **(2p)**

Dacă $x \neq y$ putem presupune, datorită simetriei, că $x < y$. Atunci $x < 1 < y$ și $k \geq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > \sqrt{4n+1}$. **(1p)**

Pe de altă parte, $k < 2\sqrt{\frac{(x+n)+(y+n)}{2}} = 2\sqrt{n + \frac{x+y}{2}} < 2\sqrt{n+2}$, deoarece $x + y = 4 - 2\sqrt{xy} < 4$. **(2p)**

Rezultă că $4n+1 < k^2 < 4n+8$, de unde $k^2 = 4n+4$ sau $k^2 = 4n+5$. În primul caz nu obținem noi soluții n . **(2p)**

În cel de-al doilea caz obținem că $n = p^2 + p - 1$, cu $p \in \mathbb{N}^*$, pentru care există valorile $x = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}\right)^2$ și

$y = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}\right)^2$ care satisfac cerințele problemei. **(2p)**

