



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
„Vrănceanu – Procopiu”

Ediția a XVI –a, 2014

XII

Problema I (10 puncte)

Fie (M, \cdot) un monoid cu $n \geq 2$ elemente, dintre care exact $n-1$ sunt elemente inversabile. Arătați că produsul celor n elemente ale monoidului nu depinde de ordinea factorilor.

Marcel Țena

Soluție.

Fie a unicul element neinvertibil al monoidului, iar $U(M) = M \setminus \{a\}$ mulțimea elementelor inversabile. Observăm că $U(M)$ este stabilă în raport cu operația lui M : dacă $x, y \in U(M)$, atunci $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = (y^{-1}x^{-1})(xy) = e$ (unde e este elementul neutru al monoidului), deci $xy \in U(M)$. **(3p)**

Dacă $x \in U(M)$, arătăm că $xa = a$. Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, atunci $xa = y \in U(M)$ și rezultă că $a = x^{-1}y \in U(M)$, fals. Analog se arată că $ay = a$, oricare ar fi $y \in U(M)$. **(3p)**

Fie P produsul tuturor elementelor din M , într-o ordine arbitrară. Folosind observația inițială, P poate fi scris sub una dintre formele xay sau xa sau ay , cu $x, y \in U(M)$. În oricare dintre situații, rezultă că $P = a$. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive.

a) Demonstrați că nu există nicio primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f având proprietatea că $f \circ F = 1_{\mathbb{R}}$.

b) Demonstrați că nu există nicio primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f având proprietatea că $F \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.

Gheorghe Iurea

Soluție.

Dacă $g \circ h = 1_{\mathbb{R}}$, atunci funcția g va fi surjectivă, iar h va fi injectivă. **(1p)**

O funcție injectivă cu proprietatea lui Darboux este strict monotonă. **(1p)**

a) Presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de primitivă F . Atunci F va fi injectivă și continuă, deci va fi strict monotonă. Rezultă că $f = F'$ va avea semn constant, fapt care contrazice surjectivitatea lui f . **(2p)**

b) Presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de primitivă F . Funcția f are proprietatea lui Darboux, ca derivată a funcției F . Fiind și injectivă, f va fi strict monotonă. **(1p)**

Funcția f nu se poate anula pe \mathbb{R} . Într-adevăr, să presupunem că ar exista $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = 0$. Cum f este strict monotonă, va păstra semne constante și diferite pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, a)$ și (a, ∞) . Rezultă că F are punct de extrem global în a , ceea ce contrazice surjectivitatea lui F . **(2p)**

Deoarece f are proprietatea valorilor intermediare și nu se anulează, deducem că f are semn constant pe \mathbb{R} . Atunci F va fi strict monotonă, deci va fi injectivă. Fiind și surjectivă, F este inversabilă, iar ipoteza asumată arată că f este inversa sa. Astfel, f va fi surjectivă, ceea ce intră în contradicție cu faptul că f are semn constant. **(2p)**

