

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
„Vrănceanu – Procopiu”
Ediția a XVI –a, 2014

XI

Problema I (10 puncte)

- a) Dați exemplu de șir $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$, iar șirul $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$, este nemărginit.
- b) Fie un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$.

Soluție.

- a) De exemplu, putem considera șirul $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$: $a_n - a_{n-2} = (-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-2}} \rightarrow 0$, însă $b_n = a_n - a_{n-1} = (-1)^n (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ este nemărginit. **(4p)**

- b) Considerăm șirul $c_n = (-1)^n (a_n - a_{n-1})$. Pentru calculul limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n}$ aplicăm lema Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} (a_{n+1} - a_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = 0.$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$. **(5p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Spunem că matricea $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea (P) dacă: oricare ar fi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $AB = U$, atunci $BA = U$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) U are proprietatea (P);
(ii) există $a \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $U = aI_n$.

Marian Andronache

Soluție.

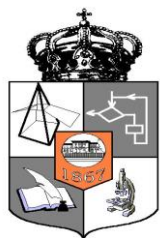
(ii) \Rightarrow (i): $AB = aI_n \Rightarrow \det A \cdot \det B = a^n \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow B = aA^{-1} \Rightarrow BA = aA^{-1}A = aI_n$. **(2p)**

(i) \Rightarrow (ii): Fie U matrice cu proprietatea (P). Arătăm că U comută cu oricare matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$U(A^{-1}A) = U \Rightarrow (U A^{-1}) A = U \stackrel{(P)}{\Rightarrow} A(U A^{-1}) = U \Rightarrow AUA^{-1} = UA^{-1}A = UAA^{-1} \Rightarrow AU = UA. \text{ (2p)}$$

Arătăm acum că U comută cu oricare matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: există $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care $\det(X - \lambda I_n) \neq 0$. Matricea $X - \lambda I_n$ fiind inversabilă, avem: $(X - \lambda I_n)U = U(X - \lambda I_n) \Rightarrow XU - \lambda U = UX - \lambda U \Rightarrow XU = UX$. **(2p)**

Cum U comută cu toate matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rezultă că $U = aI_n$, $a \in \mathbb{C}$. **(1p)**



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
„Vrănceanu – Procopiu”
Ediția a XVI –a, 2014

XI

Rămâne să dovedim că $a \neq 0$. În caz contrar, U ar fi matricea nulă, care nu are proprietatea (P): alegem $A = (a_{ij})$ cu $a_{11} = 1$ și $a_{ij} = 0$ în rest și $B = (b_{ij})$ cu $b_{n1} = 1$ și $b_{ij} = 0$ în rest și avem că $AB = O_n$ și $BA \neq O_n$. **(2p)**

