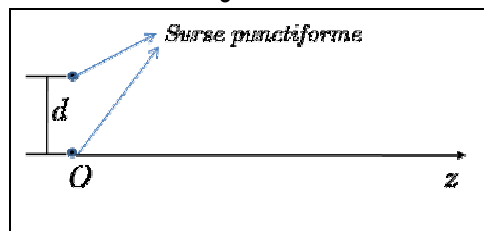


Problema I (10 puncte)

Unde și unde...

- a. Un liliac, zburând cu viteza $v_1 = 5,00 \text{ m/s}$, vânează o insectă. Dacă liliacul emite un semnal cu frecvența $\nu_1 = 40,00 \text{ Hz}$ iar ecoul recepționat are frecvența $\nu_2 = 40,40 \text{ Hz}$ care este viteza ν_2 a insectei? Consideră că liliacul și insecta se mișcă în același sens, rectiliniu, pe direcția care le unește și că viteza sunetului în aer $c = 340,00 \text{ m/s}$.
- b. O sursă punctiformă de sunet S se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza v . Puterea sursei este P . Care este intensitatea undei $\left(I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} \right)$ măsurată la distanța r în fața sursei? Viteza sunetului în aer est c .
- c. Două surse punctiforme se află la distanța d una de alta. Ele emit unde sonore sferice cu lungimea de undă λ . Se măsoară intensitatea undei rezultante de-a lungul axei Oz (vezi figura alăturată). Unde se găsesc punctele de maxim de pe axa Oz? Există un număr infinit de maxime de-a lungul axei Oz?
- d. O coardă de chitară din nichel, având lungimea inițială l_0 , este întinsă până la lungimea l astfel încât frecvența sunetului fundamental este ν_0 . Care este noua frecvență fundamentală dacă temperatura corzii crește cu $\Delta\theta$? Se presupune cunoscut coeficientul de dilatare lineară α , iar modulul de elasticitate E se consideră constant.

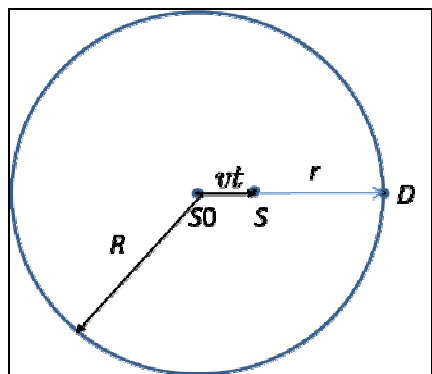


Soluție

- a. Presupunem că vitezele liliacului și insectei sunt orientate în același sens (insecta „fuge” de liliac). Frecvența

$$\text{semnalului recepționat de insectă este } \nu = \frac{c - \nu_2}{c - \nu_1} \nu_1$$

$$\text{iar frecvența ecoului recepționat de liliac este } \nu_2 = \frac{c + \nu_1}{c + \nu_2} \nu = \frac{c + \nu_1}{c + \nu_2} \frac{c - \nu_2}{c - \nu_1} \nu_1 \Rightarrow \nu_2 = 1,69 \text{ m/s.}$$



- b. Analizăm frontul de undă emis de sursă la momentul $t = 0$. Raza acestuia crește în timp după legea $R = ct$. Când acesta ajunge la detectorul D sursa a parcurs distanța vt astfel că $r = R - vt$. Energia care trece prin suprafața de arie A în timp de o perioadă, T , este $E_A = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{PT}{A}$. Deoarece S se deplasează spre D,

$$\text{perioada undei pentru detector (efect Doppler) este } T' = T \frac{c - v}{c}.$$

$$\text{Cum } r = R - vt = ct - vt \Rightarrow t = \frac{r}{c - v} = \frac{R}{c} \Rightarrow R = \frac{c}{c - v} r$$

$$\Rightarrow E_A = \frac{PT}{4\pi R^2} = \frac{PT (c - v)^2}{4\pi c^2 r^2}.$$



$$\text{Intensitatea undei la locul detectorului este } I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{E_A}{T'} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2} \frac{c - v}{c}.$$

c. Pentru maxime pe axa Oz: $r_2 - r_1 = k\lambda \Rightarrow \sqrt{d^2 + z^2} - z = k\lambda \Rightarrow z = \frac{d^2 - k^2\lambda^2}{2k\lambda},$

unde $k = 1, 2, \dots$, limitând condiția anterioară numai pentru $z > 0 \Rightarrow k < \frac{d}{\lambda}.$

Se va forma un număr finit de maxime pentru $k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor$. Maximul de ordinul 1 se va forma cel mai departe

față de poziția surselor iar cel de ordinul maxim $\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor$ va fi cel mai apropiat de acestea.

d. Modificarea frecvenței fundamentale este determinată de modificarea tensiunii din fir prin încălzire (lungimea corzii rămâne aceeași!)

$$v_1 = \frac{c}{2l}, c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, v_1 = \frac{c}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{T'}{T}}.$$

Din legea lui Hooke $T = \frac{1}{ES_0} \Delta l$, $\frac{T'}{T} = \frac{\Delta l'}{\Delta l}$ (secțiunea transversală a corzii se modifică prin încălzire dar în legea lui Hooke apare secțiunea transversală!).

$$\Delta l = l - l_0, \Delta l' = l - l', l' = l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta \theta) \Delta l' = l - l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta \theta)$$

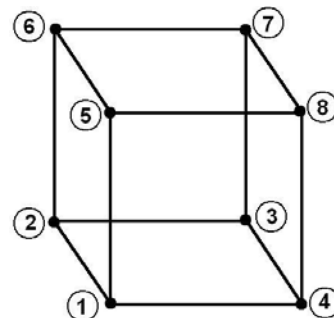
$$\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{l - l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta \theta)}{l - l_0}}$$

Soluție propusă de:

Prof. dr. Constantin COREGA – Colegiul Național Emil Racoviță – Cluj

Problema II (10 puncte)

Cubul din figura alăturată are ca laturi fire de rezistențe electrice egale, r . Atunci când o baterie electrică este legată prin conductoare electrice de rezistență electrică neglijabilă la două vârfuri ale cubului adiacente unei laturi, puterea electrică consumată pe cub este P . Aceeași putere electrică este consumată pe cubul de rezistențe dacă bateria electrică este legată la două vârfuri aflate la capetele unei diagonale de față a cubului. Considerând cunoscute r și P determină:



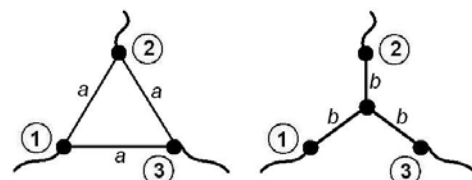
- expresiile tuturor rezistențelor electrice care se pot măsura între diferite perechi de vârfuri ale cubului;
- expresia rezistenței interne a bateriei;
- expresia tensiunii electromotoare a bateriei;
- expresia puterii electrice maxime pe care o poate debita bateria într-un circuit exterior;
- expresia puterii consumate pe cub, dacă acesta este cuplat la baterie prin vârfuri aflate la capetele unei diagonale de volum.

Sugestii

•Folosește simetria circuitelor electrice.

•Schemele din figura alăturată sunt echivalente (rezistențele electrice măsurate între bornele 12, 13 și 23 au aceleași valori atât pentru legarea "în triunghi" cât și pentru legarea "în stea").

Dacă este cazul ține seamă că între rezistențele electrice "elementare" care compun cele două rețele din figura alăturată există relația $a = 3b$.



Soluție

a. Atunci când se măsoară rezistența electrică între diferite vârfuri ale cubului se pot obține trei tipuri de valori:

- Rezistența măsurată între vârfuri ale cubului aflate la capetele unei diagonale de volum.
- Rezistența măsurată între vârfuri ale cubului aflate la capetele unei diagonale de față
- Rezistența măsurată între vârfuri ale cubului adiacente unei laturi

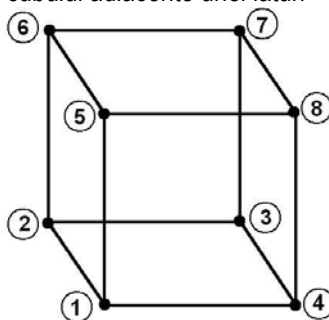


Figura 1

1. Dacă unul dintre contactele electrice este aplicat în vârful marcat în figura 2 cu 1, rezistența electrică măsurată între vârfurile aflate la capetele diagonalei de volum este R_{17} , măsurată între vârfurile marcate cu 1 și 7.

Așa cum se vede în figura 2, rotind repetat cubul cu 120° în jurul diagonalei de volum nodurile 5, 4 și 2 își schimbă reciproc pozițiile și – la fel – nodurile 6, 3 și 8.

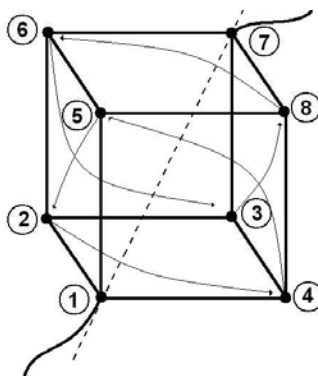


Figura 2

Invarianța proprietăților cubului la rotirea descrisă mai sus permite afirmația că nodurile 5, 4 și 2 sunt electric echivalente și au deci același potențial electric. În aceeași situație sunt și nodurile 6, 3 și 8.

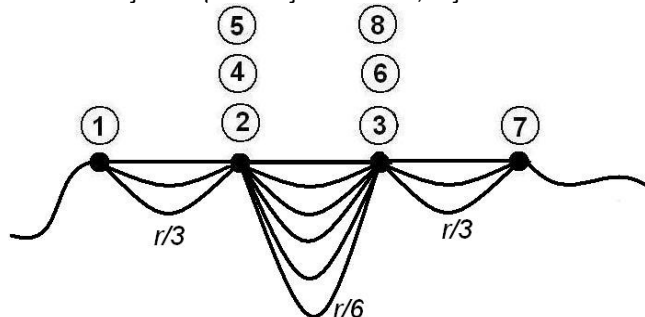


Figura 3

Având același potențial electric, nodurile pot fi legate între ele fără ca valoarea rezistenței electrice să se modifice. Schema electrică a cubului pentru care se măsoară rezistența electrică între nodurile 1 și 7 este prezentată în figura 3. Nodurile distincte sunt doar 1, 7 și nodurile "colective" 245 și 368. Toate liniile care leagă noduri în figură reprezintă fire dispuse pe laturi ale cubului având rezistența electrică identică, r .

Între vârfurile 1 și 245 rezistența electrică echivalentă este $r/3$, între vârfurile 245 și 368 rezistența electrică este $r/6$ iar între vârfurile 368 și 7 rezistența electrică echivalentă este $r/3$. În concluzie, rezistența electrică echivalentă a cubului măsurată între nodurile 1 și 7 este

$$R_{17} = \frac{5r}{6}$$

2. Dacă unul dintre contactele electrice este aplicat în vârful marcat în figura 4 cu 1, rezistența electrică măsurată între vârfurile aflate la capetele diagonalei de față este – de exemplu - măsurată între vârfurile marcate cu 1 și 3. (Aceeși valoare se poate măsura între vârfurile 1 și 8 sau 1 și 6)

Așa cum se vede în figura 4, nodurile 4 și 2 sunt simetrice față de dreapta care trece prin cele două noduri (1 și 3) contactate electric.

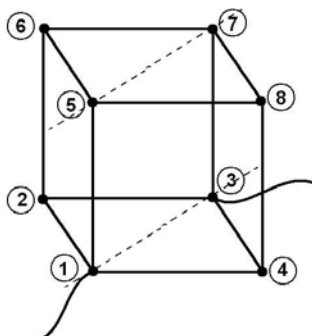


Figura 4

Nodurile 2 și 4 au deci potențiale electrice egale și pot fi legate electric fără ca valoarea rezistenței electrice echivalente să se modifice. În urma unui raționament asemănător se poate admite legarea electrică a nodurilor 6 și 8. În aceste condiții schema electrică echivalentă pentru cubul contactat în nodurile 1 și 3 este prezentată în figura 5.

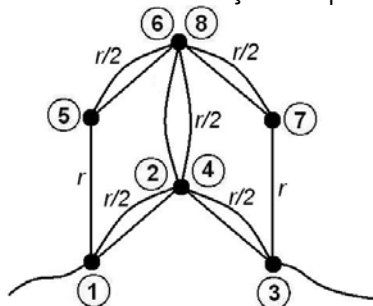


Figura 5

Nodurile distincte sunt doar 1, 3 și nodurile "colective" 24 și 68. Toate liniile care leagă noduri în figură reprezintă fire dispuse pe laturi ale cubului având rezistența electrică identică, r . Între vârfurile 1 și 24 respectiv 24 și 3 rezistența electrică echivalentă este $r/2$, între vârfurile 24 și 68 rezistența electrică este de asemenea $r/2$ iar între vârfurile 68 și 7 respectiv 68 și 5 rezistența electrică echivalentă este $r/2$. Între vârfurile 5 și 68 respectiv 7 și 68 este $r/2$.

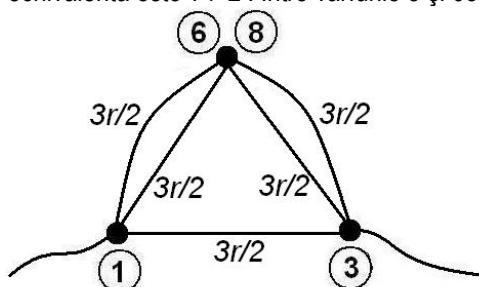


Figura 6

Transformând steaua de rezistențe cu centrul în nodul 24, construită pe nodurile 1, 3 și 68 și simplificând, schema echivalentă de mai sus poate fi prezentată ca în figura 7.

O nouă simplificare a schemei produce circuitului din figura 7.

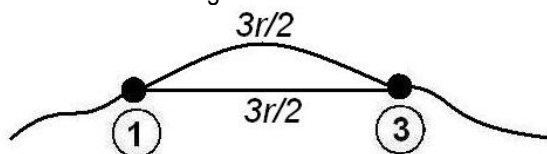


Figura 7

Rezistența echivalentă a cubului cu contacte la capetele unei diagonale de față – așa cum se vede în figura 8 – este

$$R_{13} = \frac{3r}{4}$$

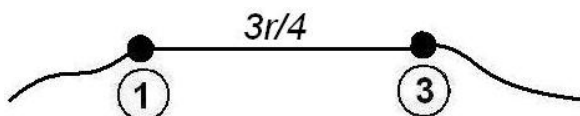


Figura 8

3. Dacă unul dintre contactele electrice este aplicat în vârful marcat în figura 9 cu 1, rezistența electrică măsurată între vârfurile aflate la capetele unei laturi este – de exemplu - măsurată între vârfurile marcate cu 1 și 4. (Aceeși valoare se poate măsura și între vârfurile 1 și 5 sau 1 și 2)

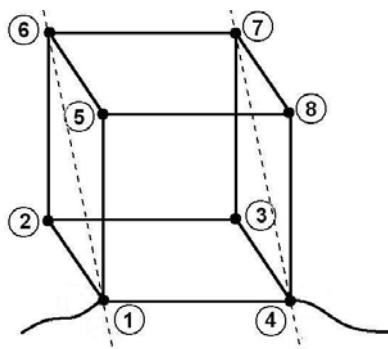


Figura 9

Așa cum se vede în figura 9, nodurile 5 și 2 respectiv 3 și 8 sunt simetrice față de dreapta care trece prin cele două noduri (1 și 4) contactate electric.

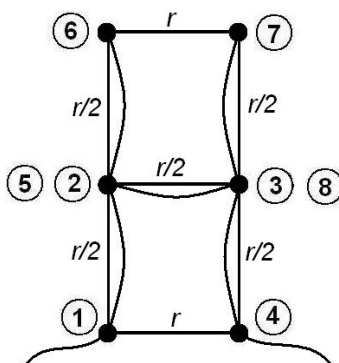


Figura 10

Nodurile 2 și 5 au deci potențiale electrice egale și pot fi legate electric fără ca valoarea rezistenței electrice echivalente să se modifice. În urma unui raționament asemănător se poate admite legarea electrică a nodurilor 3 și 8. În aceste condiții schema electrică echivalentă pentru cubul contactat în nodurile 1 și 4 este prezentată în figura 10. Nodurile distincte sunt doar 1, 4 și nodurile "colective" 25 și 38. Toate liniile care leagă noduri în figură reprezintă fire dispuse pe laturi ale cubului având rezistența electrică identică, r . Între vârfurile 1 și 25 respectiv 4 și 38 rezistența electrică echivalentă este $r/2$, între vârfurile 25 și 38 rezistența electrică este de asemenea $r/2$ iar între vârfurile 38 și 7 respectiv 52 și 6 rezistența electrică echivalentă este $r/2$. O nouă simplificare a schemei produce circuitului din figura 11.

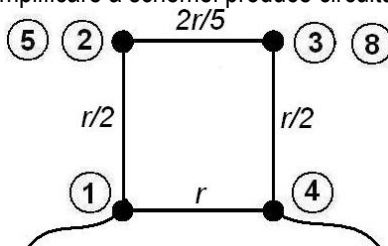


Figura 11

O nouă simplificare produce schema din figura 12

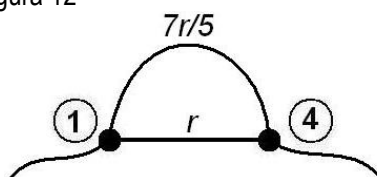
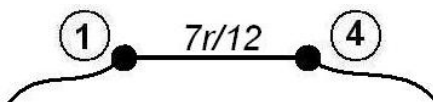


Figura 12



Rezistența echivalentă a cubului cu contacte la capetele unei laturi – așa cum se vede în figura 13 –este



$$R_{14} = \frac{7r}{12}$$

În concluzie

$$\begin{cases} R_{latura} = 7r/12 \\ R_{diag.fata} = 3r/4 \\ R_{diag.vol.} = 5r/6 \end{cases}$$

b. Așa cum este cunoscut, dacă pentru două rezistențe distincte bateria debitează puteri electrice egale rezistența internă a bateriei este media geometrică a celor două rezistențe. Rezistența r_{int} a bateriei este

$$\begin{cases} r_{int}^2 = \frac{3r}{4} \cdot \frac{7r}{12} = \frac{7r^2}{16} \\ r_{int} = \frac{r}{4} \sqrt{7} \end{cases}$$

c. Intensitatea curentului electric care trece prin circuitul care include cubul legat între două vârfuri aflate pe diagonala de față are expresia

$$I = \frac{E}{\frac{3r}{4} + \frac{r}{4} \sqrt{7}} = \frac{4E}{r} \cdot \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$$

Expresia puterii debitate de baterie pe cub este

$$\begin{cases} P = \frac{3r}{4} \cdot I^2 = \frac{3r}{4} \cdot \frac{16E^2}{r^2} \cdot \frac{1}{(3 + \sqrt{7})^2} \\ P = \frac{12E^2}{r} \cdot \frac{1}{(3 + \sqrt{7})^2} \end{cases}$$

Tensiunea electromotoare a bateriei are prin urmare expresia

$$E = \sqrt{\frac{P \cdot r}{12}} \cdot (3 + \sqrt{7})$$

d. Bateria debitează în circuitul exterior o putere maximă atunci când rezistența externă este egală cu rezistența internă a bateriei. Prin urmare

$$P_{max} = \frac{E^2}{4r} = \frac{P(3 + \sqrt{7})^2}{48}$$

e. Intensitatea curentului electric care trece prin circuitul care include cubul legat între două vârfuri aflate pe diagonala de volum are expresia

$$I_D = \frac{E}{\frac{5r}{6} + \frac{r}{4} \sqrt{7}} = \frac{12E}{r} \cdot \frac{1}{10 + 3\sqrt{7}}$$



Expresia puterii de debitare de baterie pe cub este

$$\left\{ \begin{aligned} P_{\text{diag.vol.}} &= \frac{5r}{6} \cdot I_D^2 = \frac{5r}{6} \cdot \frac{144E^2}{r^2} \cdot \frac{1}{(10 + 3\sqrt{7})^2} \\ P_{\text{diag.vol.}} &= \frac{120E^2}{r} \cdot \frac{1}{(10 + 3\sqrt{7})^2} \\ P_{\text{diag.vol.}} &= 10 \left(\frac{3 + \sqrt{7}}{10 + 3\sqrt{7}} \right)^2 P \end{aligned} \right.$$

Soluție propusă de:

Prof. drd. Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării și Tineretului

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București

Problema III (10 puncte)

Mașinării cu oscilații

A. (3 puncte)

Imaginea provenită de la un post care emite pe frecvența $f = 60 \text{ MHz}$ este recepționată perfect de un televizor situat la distanța $d = 50 \text{ km}$ de postul de emisie. Într-o zi fără perturbații atmosferice sau de altă natură, un privitor vede că imaginea de pe ecranul de televizor prezintă „încețoșări” și reveniri periodice. Astfel, apar $n = 8$ treceri prin imagini neclare pe minut. Întrucât fenomenul persistă, privitorul cere informații asupra evenimentelor petrecute în zonă. Astfel, el află că stația meteorologică de supraveghere (plasată la distanțe egale, $d/2$, de locul în care este situat televizorul și de stația de emisie a postului de televiziune) a pierdut controlul unui balon meteorologic, situat la înălțimea $h = 20 \text{ km}$ deasupra stației. De asemenea, află că este probabil ca balonul să se ridice pe verticală cu viteză constantă. Ținând seama de informațiile furnizate și știind că viteza undelor electromagnetice în aer este $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

- Calculează lungimea de undă în aer a undelor emise de postul de televiziune.
- Explică într-o frază legătura dintre mișcarea balonului și fluctuația clarității imaginii observate pe ecranul televizorului – dacă o astfel de legătură există.
- Calculează viteza de ascensiune a balonului meteorologic.

Dacă este cazul, ține seama că pentru $x \ll 1$ se poate scrie $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$.

Soluție:

- Expresia lungimii de undă a radiației electromagnetice este

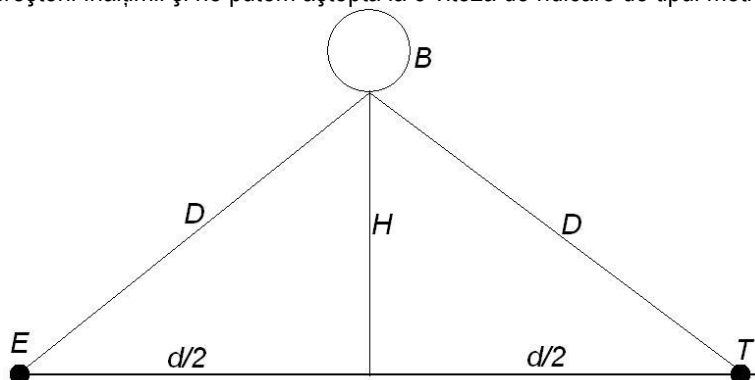
$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

și prin urmare, din datele furnizate,

$$\lambda_{TV} = \frac{3 \times 10^8}{60 \times 10^6} = 5 \text{ m}$$

- La aparatul de recepție ajung și se suprapun (constructiv sau distructiv) unda directă provenită direct de la postul de emisie și unda reflectată de balon.

Se poate presupune în mod rezonabil că între două imagini clare succesive (sau între două imagini maxim neclare succesive) drumul optic al razei reflectate de balon a crescut cu o lungime de undă. Creșterea lungimii drumului optic este de ordinul de mărime al creșterii înălțimii și ne putem aștepta la o viteză de ridicare de tipul metrilor pe minut.



- Dacă la începutul observării „fluctuației” imaginii, înălțimea la care se afla balonul era $h = 20 \text{ km}$ și dacă balonul se înalță pe verticală cu viteza v atunci după timpul t înălțimea la care se află balonul este

$$H(t) = h + v \cdot t$$



Drumul EB pe care îl parcurge raza emisă de postul de televiziune care ajunge la balon va fi

$$D(t) = \sqrt{(d/2)^2 + (h + vt)^2}$$

Drumul optic al razei care ajunge la televizor după reflexia pe balon are expresia

$$\delta_{EBT} = 2D(t) = 2\sqrt{(d/2)^2 + (h + vt)^2}$$

Deoarece $v \cdot t \ll h$, $v \cdot t \ll d$, drumul razei reflectate se poate rescrie ca

$$\delta_{EBT}(t) = 2D(t) \cong 2\sqrt{(d/2)^2 + h^2 + 2v \cdot h \cdot t} \cong 2\sqrt{(d/2)^2 + h^2} \cdot \left(1 + \frac{h \cdot v \cdot t}{(d/2)^2 + h^2}\right)$$

Diferența de drum între raza directă și raza reflectată este – la momentul inițial

$$\Delta(0) = 2\sqrt{(d/2)^2 + h^2} - d$$

La un moment ulterior, diferența de drum are expresia

$$\Delta(t) = \Delta(0) + \frac{2 \cdot h \cdot v \cdot t}{\sqrt{(d/2)^2 + h^2}} = \Delta(0) + \frac{2 \cdot v \cdot t}{\sqrt{(d/2h)^2 + 1}}$$

Perioada fluctuației periodice a imaginii este

$$T = \frac{60}{n} = 7,5 \text{ s}$$

După trecerea unui interval de timp de o perioadă, diferența de drum optic trebuie să fie mai lungă cu o lungime de undă adică

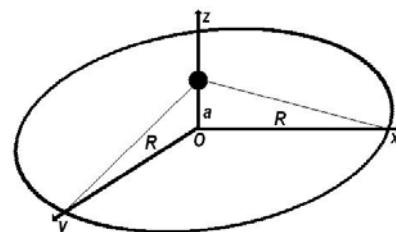
$$\frac{2 \cdot v \cdot T}{\sqrt{(d/2h)^2 + 1}} = \lambda$$

și deci

$$v = \lambda \cdot \frac{1}{2T} \sqrt{(d/2h)^2 + 1}$$

Numeric,

$$v = 5 \times \frac{1}{15} \times \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1} \cong 0,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



B. (3 puncte)

Lucrezi la proiectul unui oscilator, pe care intenționezi să-l prezinți unei companii care construiește nanomașini. Oscilatorul constă dintr-un inel de rază foarte mică

R , încărcat uniform cu sarcina electrică Q și un corp punctiform cu masa m și sarcina q , ca în schema din figura alăturată. Consideră că axa Oz este perpendiculară pe planul inelului, în centrul acestuia și că $q \cdot Q < 0$. Particula situată pe axul Oz , la distanță foarte mică de centrul inelului oscilează în lungul acestui ax, de o parte și de alta a centrului inelului. Pentru acest proiect trebuie să:

a. stabilești expresia frecvenței micilor oscilații ale particulei, în funcție de raza și sarcina electrică a inelului și respectiv de masa și sarcina corpului punctiform. În calculele pe care le efectuezi consideră că amplitudinea oscilațiilor a este mult mai mică decât raza inelului, că inelul rămâne nemișcat și că sistemul este plasat în vid.

b. calculezi frecvența de oscilație a unui electron în jurul centrului inelului cu diametrul de $2 \mu\text{m}$ încărcat cu sarcina electrică de 10^{-13} C . Cunoști că masa electronului este $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, sarcina electrică elementară este $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ și că pentru aer $1/(4\pi\epsilon) = 9 \times 10^9 \text{ m/F}$.

Soluție:

a. Consideră interacțiunea electrică dintre sarcina electrică ΔQ localizată pe o porțiune foarte mică (considerată „punctuală”) a inelului și corpul punctiform deplasat pe distanța a pe normala în centrul inelului.



Forța de interacțiune electrică are expresia

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\Delta Q \cdot q}{d^2} \vec{d}$$

Forța de interacțiune electrică are o componentă paralelă cu planul inelului și o componentă perpendiculară pe acest plan (notată cu \vec{F}_r). La sumarea contribuțiilor datorate tuturor porțiunilor elementare ale inelului componentele din planul inelului se vor anula reciproc.

Componenta \vec{F}_r are expresia

$$F_r = F_e \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\Delta Q \cdot q}{d^3} a$$

Deoarece deplasarea a a sarcinii este – conform enunțului – mult mai mică decât raza inelului se poate admite că în expresia componentei normale

$$d = \sqrt{R^2 + a^2} = R \sqrt{1 + \frac{a^2}{R^2}} \cong R$$

astfel că

$$F_r = F_e \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\Delta Q \cdot q}{R^3} a$$

Dacă se sumează contribuțiile tuturor porțiunilor elementare ale inelului pe direcția normalei la planul inelului, se obține expresia forței F_R cu care inelul ca ansamblu acționează asupra corpului punctiform.

$$F_R = \sum F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{R^3} a \sum \Delta Q = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q \cdot Q}{R^3} a$$

Forța F_R care acționează asupra particulei „trăgând-o” înapoi spre centrul inelului depinde liniar de distanța dintre poziția atinsă și poziția de echilibru și are prin urmare comportamentul unei forțe de revenire caracterizată printr-o constantă elastică \aleph

$$\aleph = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{qQ}{R^3}$$

Pulsăția micilor oscilații ale corpului sub acțiunea forței de revenire de natură electrică este

$$\omega = \sqrt{\frac{\aleph}{m}}$$

iar frecvența de oscilație are expresia

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\aleph}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{qQ}{R^3} \cdot \frac{1}{m}}$$

b. Frecvența de oscilație cerută are valoarea

$$f_{\text{electron}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-13}}{9,1 \times 10^{-31} \times 8 \times 10^{-18}}} \approx 7 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

C. (4 puncte)

Într-o navă cosmică ce orbitează în jurul Pământului, apare starea de imponderabilitate, astfel încât nu se pot folosi instrumentele obișnuite pentru a măsura greutatea și pentru a deduce apoi masa unui astronaut.

Skylab 2 și alte câteva nave spațiale sunt dotate cu un Dispozitiv de Măsurarea a Masei unui corp, constând dintr-un scaun atașat la unul din capetele unui resort elastic. Celălalt capăt al resortului este fixat într-un punct al navei spațiale. Axul resortului trece prin centrul de masă al navei. Constanta elastică a resortului este $k = 605,6 \text{ N/m}$.

a. Demonstrează că perioada de oscilație a unui resort cu constanta de elasticitate k , având atașate la cele două capete corpuri cu masele M și respectiv m are expresia

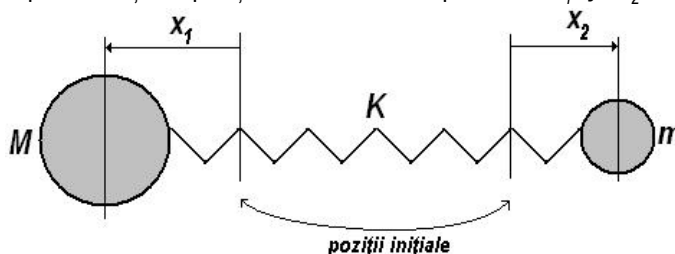
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$$

b. Când nava este fixată pe rampa de lansare, scaunul (fără persoană) oscilează cu perioada $T_0 = 1,28195 \text{ s}$. Calculează masa scaunului.

c. Când nava orbitează în jurul Pământului, astronautul se prinde cu o curea în scaun, măsoară perioada T' a oscilațiilor și obține $T' = 2,33044 \text{ s}$. Întrucât dorește să determine valoarea corectă a masei sale, astronautul măsoară și perioada de oscilație a scaunului (fără persoană), găsim în aceste condiții valoarea $T_0' = 1,27395 \text{ s}$. Considerând că masa resortului este neglijabilă și că astronautul "plutește" în interiorul navei spațiale, determină valoarea corectă a masei astronautului și masa navei spațiale.

Soluție:

a. Se poate considera pentru corpurile de mase diferite M, m legate prin resortul cu constanta elastică dată, K , o situație în care sunt – ca în figură – deplasate față de pozițiile de echilibru respectiv cu x_1 și x_2 .



Ecuatiile individuale de mișcare pentru cele două corpuri sunt respectiv

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + K(x_1 + x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + K(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

Ele se pot rescrie sub forma

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{K}{M}(x_1 + x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{K}{m}(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

Din sumarea lor rezultă

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + K\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)(x_1 + x_2) = 0$$

Relația de mai sus descrie modul în care variază în total lungimea resortului.

Această variație este evident oscilatorie și are pulsația

$$\omega^2 = K\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$$

Perioada oscilației este deci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mm}{K(M+m)}}$$

b. Din formula perioadei oscilatorului elastic

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

aplicată în situația când nava spațială este fixată pe rampa de lansare se poate deduce masa scaunului



$$m_0 = \frac{k T_0^2}{4 \pi^2}$$

$$m_0 = 25,21 \text{ kg}$$

c. Când nava spațială orbitează în jurul Pământului, sistemul oscilant este alcătuit din resortul ce are la unul din capete scaunul de masă m_0 și la celălalt capăt nava spațială de masă M . Masa redusă a sistemului navă spațială – scaun este

$$m_0' = \frac{m_0 M}{m_0 + M}$$

iar perioada de oscilație se poate scrie

$$T_0' = 2 \pi \sqrt{\frac{m_0'}{k}}$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0'} \right)^2 = \frac{m_0}{m_0'}$$

Exprimând masa navei spațiale

$$M = \frac{m_0}{\frac{m_0}{m_0'} - 1}$$

se poate calcula masa acesteia

$$M = 2001 \text{ kg}$$

Notează cu m masa astronautului împreună cu a scaunului și cu m' masa redusă a sistemului navă spațială - scaun împreună cu astronaut

$$m' = \frac{m M}{m + M}$$

Masa m' se determină din expresia perioadei T' , obținându-se valoarea

$$m' = 83,31 \text{ kg}$$

Masa astronautului împreună cu cea a scaunului este

$$m = 86,93 \text{ kg}$$

iar valoarea corectă a masei astronautului este

$$m_{\text{astronaut}} = 86,93 \text{ kg} - 25,21 \text{ kg} = 61,72 \text{ kg}$$

Soluție propusă de:

Prof. drd. Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării și Tineretului

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea București