

Problema I (10 puncte)

Săritura omului ... și cursa leopardului

A. Oricărei persoane care efectuează o săritură i se recomandă să flexeze genunchii la aterizare.

Consideră un om cu masa m care sare de la înălțimea h și aterizează pe ambele picioare, pe o porțiune cu pământ uscat (figura 1). La momentul de timp t_1 picioarele omului ating suprafața de aterizare (situația B din figura 1). Pentru a amortiza impactul cu această suprafață, omul flexează genunchii, astfel încât între momentele de timp t_1 și t_2 centrul de masă al omului coboară pe distanța Δh (situația C din figura 1). Presupune că viteza inițială a omului este zero, că forțele de frecare cu aerul sunt neglijabile și că valoarea accelerației gravitaționale este $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. În rezolvarea problemei utilizează un model în care omul este înlocuit cu un punctul material reprezentat în desen prin cercul plin.

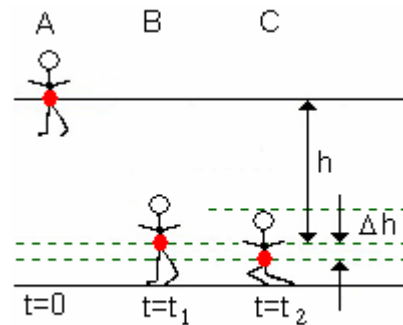


Figura 1

a. Determină expresia forței medii cu care pământul acționează asupra picioarelor omului, pe durata $\Delta t = t_2 - t_1$ a aterizării. Exprimă rezultatul în funcție de m , g , h și Δh .

b. Determină expresia duratei Δt , în funcție de g , h și Δh .

c. Estimează valoarea maximă a raportului $h/\Delta h$ care se poate realiza fără ruperea tibiei, dacă masa omului este $m = 60 \text{ kg}$. Pentru estimare poți admite că presiunea suportată de un picior fără ruperea tibiei este de $1,6 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ și că cea mai mică secțiune a tibiei este situată puțin deasupra gleznei și are valoarea de circa $3,2 \text{ cm}^2$.

B. Când urmărește prada, leopardul poate alerga cu o viteză foarte mare, dar își poate menține o astfel de viteză numai pentru un interval scurt de timp.

Un leopard cu masa de 50 kg , care aleargă cu viteză maximă de 110 km/h cheltuiește o putere de 160 kW . Temperatura normală a corpului leopardului este de 38°C , iar valoarea căldurii specifice a acestuia este de $3,5 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$. Cunoscând că temperatura corpului leopardului nu poate depăși 41°C , și că 70% din valoarea puterii cheltuite în timpul alergării încălzește corpul leopardului, determină:

a. intervalul maxim de timp în care leopardul poate alerga cu viteză maximă;

b. distanța maximă pe care leopardul poate alerga cu viteză maximă.

Soluție - Problema I

A.

a. a. Conservarea energiei între momentul începerii căderii și momentul atingerii pământului permite calculul vitezei v_B în situația B.

$$\begin{cases} \frac{m \cdot v_B^2}{2} = m \cdot g \cdot h \\ v_B = \sqrt{2g \cdot h} \end{cases}$$

(1)

În cursul evoluției BC, lucrul mecanic al forței „de rezistență” $F_{rezistentă}$ cu care pământul acționează asupra omului, (egală și de sens opus forței cu care picioarele omului acționează asupra pământului) „consumă” energia cinetică din B plus variația energiei potențiale corespunzătoare coborârii centrului de greutate pe înălțimea Δh adică

$$\Delta h \cdot F_{rezistentă} = m \cdot g \cdot \Delta h + \frac{m \cdot v_B^2}{2} = m \cdot g \cdot (\Delta h + h) \quad (2)$$

Prin urmare,

$$F_{rezistentă} = m \cdot g \cdot \frac{(\Delta h + h)}{\Delta h} = m \cdot g \cdot \left(1 + \frac{h}{\Delta h}\right) \quad (3)$$

b. Într-un sistem de referință cu axa verticală îndreptată în jos, variația impulsului omului (considerat punct material) în timpul frânării prin flexarea genunchilor este Δp

$$\begin{cases} \Delta p = p_C - p_B = 0 - mv_B = -mv_B \\ \Delta p = -m\sqrt{2g \cdot h} \end{cases} \quad (4)$$

Variația impulsului este datorată acțiunii forței totale F_{total} care acționează asupra omului în intervalul de timp Δt cât are loc amortizarea căderii.

În sistemul de coordonate considerat, forța totală care acționează asupra omului este suma dintre greutatea sa (care acționează în jos) și forța de rezistență care împinge omul în sus adică,

$$\begin{cases} F_{total} = m \cdot g - F_{rezistentă} = m \cdot g - m \cdot g \cdot \left(1 + \frac{h}{\Delta h}\right) \\ F_{total} = -m \cdot g \cdot \frac{h}{\Delta h} \end{cases} \quad (5)$$

Deoarece

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F_{total} \quad (6)$$

intervalul de timp Δt al flexării genunchilor are valoarea

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{\Delta p}{F_{total}} \\ \Delta t = \frac{\sqrt{2g \cdot h}}{g \cdot \frac{h}{\Delta h}} \\ \Delta t = \Delta h \sqrt{\frac{2}{g \cdot h}} \end{cases} \quad (7)^*$$

c. Din valorile numerice furnizate, rezultă că cea mai mare forță $F_{rezistentă,max}$ pe care piciorul o poate suporta din partea pământului (ținând seama că aterizarea se produce pe două picioare – deci aria tibiei trebuie dublată) are valoarea

$$F_{rezistentă,max} = 2 \times 1,6 \times 10^8 \times 3,2 \times 10^{-4} \text{ N} = 10,24 \times 10^4 \text{ N} = 102,4 \text{ kN} \quad (8)$$

Folosind relația (3) se obține pentru raportul $\left(\frac{h}{\Delta h}\right)_{max}$ expresia

$$\left(\frac{h}{\Delta h}\right)_{\max} = \frac{F_{\text{rezistentă,max}}}{m \cdot g} - 1 \quad (9)$$

Valoarea numerică a raportului $\left(\frac{h}{\Delta h}\right)_{\max}$ în condițiile date este

$$\left(\frac{h}{\Delta h}\right)_{\max} = \frac{102400}{60 \times 9,81} - 1 \cong 173 \quad (10)^*$$

Comentariu.

Pentru săritură „țeapănă”, cu flexarea de doar un centimetru, piciorul se rupe la un salt de la înălțimea de 1,7 m. S-ar părea că dacă flexarea este de jumătate de metru, s-ar putea sări de la 86 de metri. De fapt, problema se referă la ruperea oaselor, dar există țesuturi mai vulnerabile care nu suportă decelerații atât de mari.

B.

a. Leopardul poate alerga atâta timp cât temperatura corpului său crește de la 38°C la 41°C . Căldura absorbită de corpul leopardului are expresia

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \quad (11)$$

Pe de altă parte această cantitate de căldură se poate scrie

$$Q = \eta \cdot P \cdot \tau_{\max} \quad (12)$$

unde $\eta = 0,7$ iar τ este intervalul de timp cât aleargă leopardul

Combinând relațiile (11) și (12) se obține

$$\tau_{\max} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta t}{\eta \cdot P} \quad (13)$$

Valoarea numerică a acestui interval de timp este

$$\tau_{\max} = \frac{50 \times 3500 \times 3}{0,7 \times 160000} \cong 4,69 \text{ s} \quad (14)^*$$

b. Distanța parcursă de leopard astfel încât corpului acestuia să nu depășească temperatura de 41°C este

$$D_{\max} = v_{\max} \cdot \tau_{\max} \quad (15)$$

adică

$$D_{\max} = v \cdot \frac{m \cdot c \cdot \Delta t}{\eta \cdot P} \quad (16)$$

Efectuând calculul numeric se obține

$$D_{\max} \cong 143 \text{ m} \quad (17)^*$$

Subiect și soluție propuse de:

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Evaluare și Examinare – Ministerul Educației,
Cercetării, Tineretului și Sportului*

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București