

## I. Cutremure și valuri

### I.A. Cutremur și . . . .

La suprafața de separare a două straturi alcătuite din roci diferite, o undă seismică incidentă se divizează, formând atât o undă transmisă cât și o undă reflectată.

„Metoda reflexiei” este un procedeu de prospecțiune geologică în care se folosește comportarea unei seismice la interfața straturilor geologice.

Problema de față îți propune să analizezi posibilitatea localizării în interiorul pământului, a unui strat de rocă având fața de sus plană și înclinată în raport cu suprafața, considerată plană și orizontală, a pământului. În figura alăturată, suprafața pământului este reprezentată – în secțiune verticală – de dreapta  $RQ$ , iar suprafața stratului de rocă este reprezentată de dreapta  $AB$ . Undele seismice datorate unei explozii produse în punctul  $S$ , aflat pe suprafața Pământului sunt detectate cu două aparate așezate tot pe suprafața pământului, în punctele  $R$  și  $Q$ , situate la distanțe egale,  $a = 100\text{m}$  de punctul în care se produce explozia. Consideră situația simplă în care sursa exploziei și detectorii se află într-un plan perpendicular pe muchia unghiului diedru determinat de suprafața pământului și suprafața stratului de rocă. Dacă explozia se produce la momentul  $t_0$ , un detector înregistrează un șoc seismic la momentul  $t_1 = t_0 + 0,025\text{s}$  și un alt șoc la  $t_2 = (t_0 + \sqrt{3}/40)\text{s} \cong t_0 + 0,043\text{s}$ , iar detectorul al doilea înregistrează două șocuri, la momentele  $t_1 = t_0 + 0,025\text{s}$  și  $t_2' = (t_0 + \sqrt{7}/40)\text{s} \cong t_0 + 0,066\text{s}$ .

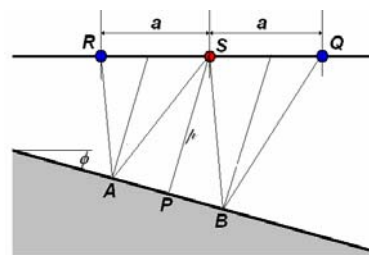
Determină:

- distanța  $p$  dintre punctul în care a avut loc explozia și suprafața stratului de rocă
  - valoarea unghiului diedru dintre suprafața local orizontală a Pământului și suprafața stratului de rocă.
- În rezolvare poți – eventual – considera că undele seismice ajunse la detectorii  $R$  și  $Q$  „par să vină” de la o sursă imaginată – simetrica sursei reale față de dreapta  $AB$ .
- Se cunoaște că într-un triunghi oarecare având laturile  $a, b, c$  și unghiul  $C$  opus laturii  $c$  se poate scrie teorema Pitagora generalizată  $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$

### Cutremur și. . . . . - Soluție

Determinarea parametrilor geometrici ceruți pentru stratul de rocă este descrisă în cele ce urmează.

În figura 1.,  $S$  este punctul exploziei iar  $R$  și  $Q$  sunt detectoarele așezate la distanțe egale,  $a$ , de punctul exploziei  $S$ . Când se produce explozia în  $S$  unde seismice se propagă spre fața  $APB$  a stratului de rocă de care sunt reflectate. Diferența de natură dintre materialul stratului de detectat și materialul de deasupra sa creează interfața de reflexie. În situația simplă din problemă normalele  $DA, PS$ , și toate direcțiile de propagare ale undelor seismice  $SA, AR, SB, BQ$  ca și  $SR, SQ$  sunt linii drepte coplanare. Timpii necesari undelor reflectate pentru a atinge receptorii pot fi calculați cu ușurință considerând „imaginea”  $S'$  a sursei de unde seismice  $S$



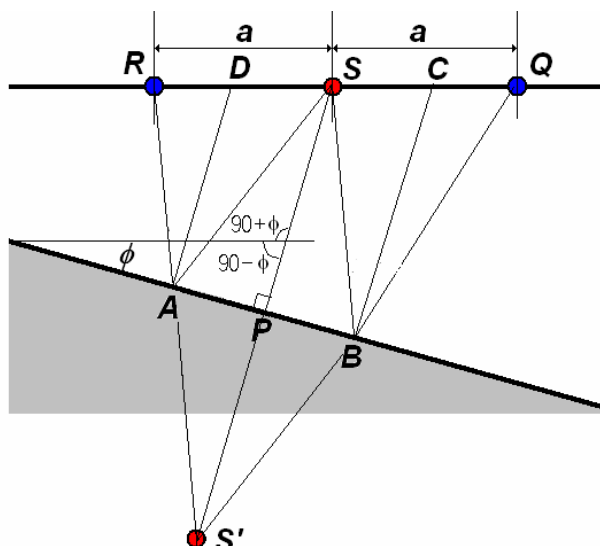


Figura I.1

Drumul unei unde reflectate în  $A$ , care ajunge în  $R$  are lungimea egală cu aceea a segmentului  $S'R$  iar drumul unei unde reflectate în  $B$  care ajunge la detectorul  $Q$  are lungimea egală cu aceea a segmentului  $S'Q$ . Să introducem notația

$$SP = S'P = p \quad (1.1)$$

(valoarea parametrului  $p$  reprezintă răspunsul la prima întrebare a problemei)

Conform enunțului

$$SR = SQ = a \quad (1.2)$$

Din motive geometrice

$$\angle PSR = 90 + \phi \quad (1.3)$$

De asemenea

$$\begin{cases} SA + AR = S'R \\ SB + BQ = S'Q \end{cases} \quad (1.4)$$

Dacă

$$\begin{cases} SP = p \\ SS' = 2p = \delta \end{cases} \quad (1.5)$$

distanța parcursă de unde de la sursă la primul receptor are, din considerente trigonometrice în triunghiul  $SS'R$ , expresia

$$\begin{cases} S'R = \left\{ (S'S)^2 + (SR)^2 - 2S'S \cdot SR \cdot \cos(90 - \phi) \right\}^{1/2} \\ S'R_1 = \left\{ \delta^2 + a^2 - 2\delta \cdot a \cdot \sin \phi \right\} \end{cases} \quad (1.6)$$

Dacă viteza de propagare a unei seismice este  $v$ , timpul  $t_R$  de propagare pentru undă între punctele  $S$  și  $R$  trecând prin reflexia din  $A$  este

$$t_R = \frac{\left\{ \delta^2 + a^2 - 2\delta \cdot a \cdot \sin \phi \right\}^{1/2}}{v} \quad (1.7)$$

Timpul de propagare este măsurat cu detectori foarte sensibili. Diferența de timp măsurată între momentele în care undele seismice ajung la detectorul din  $R$  și respectiv detectorul din  $Q$  este de câteva milisecunde.

Rostul măsurărilor este determinarea valorilor  $p = \delta/2$  și respectiv  $\phi$  sau  $\sin\phi$ .

Cu notațiile

$$\begin{cases} \delta^2 = x \\ \delta \cdot \sin\phi = y \end{cases} \quad (1.8)$$

pentru cei doi receptori plasați la distanțe egale,  $a$ , de locul exploziei test – timpii de propagare verifică relațiile

$$\begin{cases} x + a^2 + 2y \cdot a - t_Q^2 \cdot v^2 = 0 \\ x + a^2 - 2y \cdot a - t_R^2 \cdot v^2 = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Valoarea parametrului  $x$  rezultă imediat prin adunarea celor două relații de mai sus

$$x = \frac{1}{2}(-2a^2 + (t_Q^2 + t_R^2) \cdot v^2) \quad (1.10)$$

Din scăderea celor două relații rezultă

$$y = \frac{(t_Q^2 - t_R^2) \cdot v^2}{4a} \quad (1.11)$$

și prin urmare

$$\begin{cases} \delta^2 = 4p^2 = \frac{1}{2}(-2a^2 + (t_Q^2 + t_R^2) \cdot v^2) \\ p = \sqrt{\frac{1}{8}(-2a^2 + (t_Q^2 + t_R^2) \cdot v^2)} \end{cases} \quad (1.12)$$

De asemenea

$$\sin\phi = \frac{(t_Q^2 - t_R^2) \cdot v^2}{8a \cdot p} \quad (1.13)$$

Semnalul detectat de ambele detectoare la momentul  $t_1$  trebuie să se datoreze undelor seismice care ajung de la explozie la cei doi detectori prin propagare pe orizontală. Deoarece distanța de la locul exploziei la detectori este  $a = 100m$  iar timpul de propagare este

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 0,025s \quad (1.14)$$

rezultă că viteza de propagare a undelor seismice este

$$v = \frac{a}{\Delta t} = \frac{100}{0,25} m \cdot s^{-1} = 4000 m \cdot s^{-1} \quad (1.15)$$

Din descrierea din enunț rezultă că semnalul ajunge la detectorul din  $R$  prin reflexie în intervalul de timp

$$t_R = t_2 - t_0 = \frac{\sqrt{3}}{40} s \quad (1.16)$$

Semnalul reflectat ajunge la detectorul  $Q$  în timpul

$$t_Q = t_2' - t_0 = \frac{\sqrt{7}}{40} s \quad (1.17)$$

Din (1.12) rezultă

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{8}(-2a^2 + (t_Q^2 + t_R^2) \cdot v^2)} \quad (1.18)^*$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{8}(-2 \times 10^4 + 10^5)} = 100 m$$

Din (1.13) rezultă

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{\left( \left( \frac{\sqrt{3}}{40} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{7}}{40} \right)^2 \right) \cdot (4000)^2}{8 \times 10^4} = \frac{1}{2} \\ \phi = 30^\circ \end{cases} \quad (1.19)^*$$

### I.B. Valuri

(5 puncte)

Undele datorate unor cutremure cu epicentre aflate sub oceane produc valuri pe suprafața acestora. În largul oceanului, acolo unde adâncimea  $h$  a apei are valoare mare, amplitudinea valului produs de cutremur – tsunami – este mică, dar când tsunami ajunge în apele puțin adânci din apropierea țărmului, amplitudinea valului devine importantă.

a. Determină expresia densității de energie dintr-o coardă elastică, uniformă, cu masa unității de lungime  $\mu$ , în care, datorită tensionării cu o forță  $F$ , apar unde transversale armonice. Determină și expresia puterii transportate de undă.

b. Arată că amplitudinea  $A$  a valului tsunami este proporțională cu  $1/h^{1/4}$ . În demonstrație ține seama că la fel ca în cazul unei unde transversale într-o coardă, puterea transportată de undă este proporțională cu produsul dintre amplitudine, pulsație și viteza de propagare,  $v\omega^2 A^2$ . Presupune că pulsația  $\omega$  rămâne constantă și că puterea undei nu se disipă. Ai în vedere că undele de suprafață, gravitaționale, pentru apă adâncă (și pentru tsunami) au viteza de propagare  $v = \sqrt{gh}$ .

c. Presupunând că tsunami are amplitudinea de 30 de cm în larg, acolo unde adâncimea apei este de  $h_{\text{arg}} = 4096 m$ , determină amplitudinea pentru tsunami și distanța dintre „creasta” valului și „valea” acestuia într-o zonă de coastă în care adâncimea apei este  $h_{\text{mal}} = 10 m$ .

### I.B. Valuri - Soluție

a. O undă transversală într-o coardă elastică are energie cinetică pentru că particulele coardei se află în mișcare și pentru că există în coardă o energie potențială (deoarece este necesar un lucru mecanic pentru deformarea coardei). Direcția de propagare a undei este  $Ox$  iar oscilația transversală se petrece pe direcția  $Oy$  în planul  $xOy$ .

Fie o mică porțiune din coardă  $\Delta x$ . Masa unității de lungime a coardei este  $\mu$  și deci masa porțiunii de coardă va fi  $\mu \cdot \Delta x$ . Viteza de oscilație a porțiunii de resort este  $\Delta y / \Delta t$ . Energia cinetică atașată porțiunii de coardă este

$$\Delta K = \frac{1}{2} \mu \cdot \Delta x \cdot \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 \quad (1.20)$$

Pentru a găsi energia potențială să ținem seama de ușoara deformare a coardei în timpul trecerii undei

Alungirea coardei deformate este

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \Delta x = \Delta x \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right] \quad (1.21)$$

Pentru valori mici ale deformării

$$\Delta l = \Delta x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 - 1 \right] \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \quad (1.22)$$

Energia potențială atașată acestei deformări este

$$\Delta U = F \cdot \Delta l \quad (1.23)$$

$F$  fiind forța de deformare a resortului

Energia totală asociată cu porțiunea  $dx$  de coardă „cu undă” este

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} \mu \cdot \Delta x \cdot \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \quad (1.24)$$

Densitatea de energie, energia pe unitate de lungime este

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \cdot \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \quad (1.25)$$

Dacă unda despre care se propagă în coarda elastică este o undă armonică

$$y = A \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (1.26)$$

atunci

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = A \omega \cos(\omega t - kx) \quad (1.27)$$

și

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -A k \cos(\omega t - kx) \quad (1.28)$$

astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \cdot (A \omega \cos(\omega t - kx))^2 + \frac{1}{2} F (A k \cos(\omega t - kx))^2 \\ \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2} A^2 \cos^2(\omega t - kx) \cdot [\mu \cdot \omega^2 + F \cdot k^2] \end{cases} \quad (1.29)$$

Deoarece viteza de propagare a undelor transversale în coarda elastică este

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (1.30)$$

și pentru lungimea de undă  $\lambda$ , pulsația  $\omega$  și viteza de propagare  $v$  se pot scrie relațiile

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} ; \omega = 2\pi f ; v = \lambda \cdot f \quad (1.31)$$

adică

$$\omega = k \cdot v \quad (1.32)$$

rezultă că

$$F \cdot k^2 = F \cdot \frac{\omega^2}{v^2} = F \cdot \frac{\omega^2}{F/\mu} = \mu \cdot \omega^2 \quad (1.33)$$

astfel că densitatea de energie pentru undă este

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = A^2 \cdot \mu \cdot \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (1.34)$$

Puterea transportată de o undă este pur și simplu cantitatea de energie care trece printr-un punct dat al coardei în unitatea de timp. Energia trebuie să călătorească având aceeași viteză ca și unda. Energia „traversează” intervalul  $\Delta x$  în timpul  $\Delta t$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \quad (1.35)$$

Puterea instantanee transportată de undă este

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot v = A^2 \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot v \cdot \cos^2(\omega t - kx) \quad (1.36)$$

Puterea poate avea o valoare instantanee minimă, 0, și o valoare instantanee maximă

$$P_{\max im} = A^2 \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot v \quad (1.37)$$

**b.** Preluând pentru cazul valurilor rezultatul anterior, (1.37), se poate scrie pentru puterea valului

$$P_{val} = \aleph \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v \quad (1.38)$$

Deoarece – conform enunțului –

$$v = \sqrt{g \cdot h} \quad (1.39)$$

relația (1.38) se rescrie sub forma

$$P_{val} = \aleph \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{g \cdot h} \quad (1.40)$$

Deoarece

$$A^2 \cdot \sqrt{h} = const \quad (1.41)$$

rezultă

$$A \sim \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \quad (1.42)$$

**c.** Conform relației (1.41) scrisă sub forma

$$A^4 \cdot h = const \quad (1.43)$$

se poate corela situația „din larg” cu situația „la coastă” scriind o relație de forma

$$A_{larg}^4 \cdot h_{larg} = A_{coasta}^4 \cdot h_{coasta} \quad (1.44)$$

de unde

$$A_{coasta} = A_{larg} \cdot \sqrt[4]{\frac{h_{larg}}{h_{coasta}}} \quad (1.45)$$

Cu valori numerice

$$A_{\text{coasta}} = 0,30 \cdot \sqrt{\frac{4000}{10}} m \cong 1,34 m \quad (1.46)$$

Distanța dintre creasta valului și valea sa este dublul amplitudinii adică

$$2A_{\text{coasta}} \cong 2,68 m \quad (1.47)$$

## II. Clătinare

### II.A. Fiord și . . .

(5 puncte)

Fiordul, un golf foarte lung și îngust, cu maluri înalte și aproape verticale, poate fi considerat ca fiind un „vas” paralelipipedic cu lățime  $L$  și lungime  $\ell = 30\text{km}$ , în care se află apă cu adâncimea  $h = 30\text{m}$ . Uneori, apa din fiord se poate legăna astfel încât suprafața plană a apei, un dreptunghi foarte îngust, se înclină rotindu-se față de un ax paralel cu laturile scurte ale fiordului și plasat la jumătate din lungimea golfului. În acest mod de oscilație, gravitațional, apa se ridică și apoi coboară la capetele înguste ale fiordului pe distanța  $d$  față de suprafața orizontală a apei liniștite. Analizând evoluția centrului de greutate al apei din fiord găsește frecvența proprie a oscilației „de legănare” a apei în funcție de parametrii geometrici ai

fiordului și de valoarea accelerației gravitaționale  $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ai în vedere că  $\ell \gg L \gg h \gg d$  și că suprafața apei rămâne plană în timpul oscilației.

### Fiord soluția

În figura de mai jos este prezentată o secțiune transversală a fiordului. Poziția de echilibru a suprafeței apei este orizontală marcată cu  $AB$  în figură. Axa „de rotație” a suprafeței apei lasă în secțiune urma  $O$ . Suprafața înclinată a apei este reprezentată în figură prin linia  $MN$ . În cursul unei oscilații a suprafeței apei punctul  $M$  aflat la distanță  $d$  sub nivelul suprafeței de echilibru ajunge la poziția aflată la distanța  $d$  peste nivelul suprafeței de echilibru.

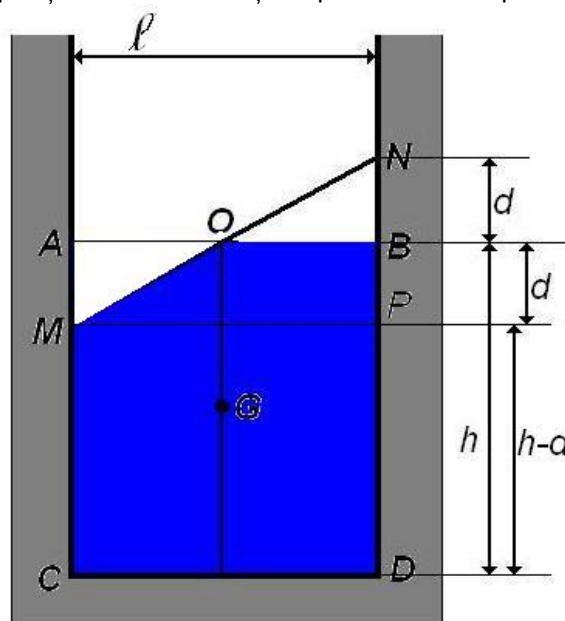


Figura II.1

Figura, care permite raționamente corecte, nu respectă proporțiile din enunț. Ai în vedere că punctele  $M$  și  $N$  se află pe laturile foarte înguste ale fiordului.

În timpul clătinării apei din fiord o parte a apei (corpul prismatic reprezentat prin poligonul  $MOBDC$  în imaginea secțiunii verticale transversale din figură) nu-și modifică poziția. În sistemul de coordonate cu originea în  $C$  centrul său de greutate are coordonatele invariabile  $(x_{fix}, y_{fix})$ ; masa sa este  $m_{fix}$ .

O altă parte din apa fiordului, un corp prismatic cu secțiune triunghiulară, își schimbă poziția în cursul clătinării mutându-se din zona marcată în secțiune cu  $\triangle MAO$  în zona marcată în

secțiune cu  $\Delta NOB$ . Coordonatele punctelor de interes pentru evoluția centrului de greutate a apei din fiord sunt

$$A(0, h); B(\ell, h); C(0, 0); D(\ell, 0); M(0, h-d); N(\ell, h+d); O(\ell/2, h) \quad (II.1)$$

Centrul de greutate al apei deplasate, „care pleacă spre dreapta”, urcate pe  $DN$  este

$$\begin{cases} x_{dreapta} = \frac{\ell + \ell + \ell/2}{3} = \frac{5\ell}{6} \\ y_{dreapta} = \frac{h + h + (h+d)}{3} = h + \frac{d}{3} \end{cases} \quad (II.2)$$

Masa apei deplasate este

$$m = \frac{(\ell/2) \cdot d \cdot L}{2} \rho = \frac{\ell \cdot d \cdot L \cdot \rho}{4}. \quad (II.3)$$

Corespunzător, masa apei care nu-și modifică poziția este

$$m_{fix} = \ell \cdot L \cdot h \cdot \rho - \frac{\ell \cdot d \cdot L \cdot \rho}{4} = \ell \cdot L \cdot \rho \left( h - \frac{d}{4} \right) \quad (II.4)$$

Masa totală a apei este

$$m_{fix} + m = \ell \cdot L \cdot h \cdot \rho \quad (II.5)$$

În poziția marcată  $\Delta MAO$  apa deplasată are coordonatele centrului de masă

$$\begin{cases} x_{echilibru} = \frac{\ell/2 + 0 + 0}{3} = \frac{\ell}{6} \\ y_{echilibru} = \frac{h + h + (h-d)}{3} = h - \frac{d}{3} \end{cases} \quad (II.6)$$

Când apa din lac este dispusă ca o prismă dreaptă cu secțiunea  $ABCD$  centrul său de masă are coordonatele

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m_{fix} \cdot x_{fix} + m \cdot (\ell/6)}{m_{fix} + m} \\ y_1 = \frac{m_{fix} \cdot y_{fix} + m \cdot (h - (d/3))}{m_{fix} + m} \end{cases} \quad (II.7)$$

Când apa din lac este dispusă sub forma corpului prismatic având secțiunea  $MNDC$  centrul său de masă are coordonatele

$$\begin{cases} x_2 = \frac{m_{fix} \cdot x_{fix} + m \cdot (5\ell/6)}{m_{fix} + m} \\ y_2 = \frac{m_{fix} \cdot y_{fix} + m \cdot (h + (d/3))}{m_{fix} + m} \end{cases} \quad (II.8)$$

Deplasarea centrului de masă în cursul clătinerii este constituită din

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{m \cdot (2\ell/3)}{m_{fix} + m} \\ \Delta y = \frac{m \cdot (2d/3)}{m_{fix} + m} \end{cases} \quad (II.9)$$

sau, ținând seama de expresiile maselor de apă,

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{(L \cdot d \cdot \ell \cdot \rho / 4) \cdot (2\ell/3)}{L \cdot \ell \cdot h \cdot \rho} \\ \Delta y = \frac{(L \cdot d \cdot \ell \cdot \rho / 4) \cdot (2d/3)}{L \cdot \ell \cdot h \cdot \rho} \end{cases} \quad (II.10)$$

sau

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{d \cdot \ell}{6 \cdot h} \\ \Delta y = \frac{d^2}{6 \cdot h} \end{cases} \quad (II.11)$$

Vitezele de deplasare a centrului de masă pe direcțiile orizontală și respectiv verticală ca funcție de viteza de variație a deplasării  $d$  în timp  $v_d = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \dot{d}$  sunt

$$\begin{cases} v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\ell}{6 \cdot h} \cdot \dot{d} \\ v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2d}{6 \cdot h} \cdot \dot{d} \end{cases} \quad (II.12)$$

În consecință, viteza de deplasare a centrului de masă este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\dot{d}}{6h} \sqrt{\ell^2 + 4d^2} = \frac{\dot{d}}{6h} \ell \sqrt{1 + \left(\frac{2d}{\ell}\right)^2} \cong \frac{\dot{d}}{6h} \ell \quad (II.13)$$

Deoarece  $d \ll h$  rezultă că  $v_y \ll v_x$ . Dacă se admite că energia cinetică a apei este energia cinetică a centrului de masă al apei, rezultă că

$$\begin{cases} E_{cinetica} = \frac{m \cdot v_x^2}{2} = \frac{L \cdot \ell \cdot h \cdot \rho}{2} \cdot \frac{\ell^2}{36h^2} \cdot \dot{d}^2 \\ E_{cinetica} = \frac{L \cdot \ell^3 \cdot \rho}{72h} \cdot \dot{d}^2 \end{cases} \quad (II.14)$$

Dacă energia potențială a apei din fiord este considerată nulă pentru poziția de echilibru, energia potențială gravifică a apei „care se leagănă” va fi

$$\begin{cases} E_{poten\crotot} = (m + m_{fix}) \cdot g \cdot \Delta y \\ E_{poten\crotot} = (L \cdot \ell \cdot h \cdot \rho) \cdot g \cdot \frac{d^2}{6h} \\ E_{poten\crotot} = \frac{L \cdot \ell \cdot \rho \cdot g \cdot d^2}{6} \end{cases} \quad (II.15)$$

Mișcarea oscilatorie armonică având elongația  $y$  a unui corp cu masa  $m$  atașat de un resort cu constanta elastică  $k$  este caracterizată prin energiile cinetică și potențială având expresiile

$$\begin{cases} E_c = \frac{m\dot{y}^2}{2} \\ E_p = \frac{ky^2}{2} \end{cases} \quad (II.16)$$

Pulsația oscilației este

$$\omega^2 = k/m = E_p/E_c \quad (II.17)$$

Considerând că mișcarea apei din fiord este o mișcare oscilatorie armonică ( ceea ce poate fi susținut prin dependența energiei cinetice de  $\dot{d}$  și a energiei potențiale de  $d$  - astfel că  $d$  este asimilabil cu elongația mișcării ).

În termenii acestei analogii pulsația „legănării” apei este

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{\frac{L \cdot \ell \cdot \rho \cdot g}{6}}{\frac{L \cdot \ell^3 \cdot \rho}{72h}} = 12 \frac{g \cdot h}{\ell^2} \\ \omega = \frac{2}{\ell} \sqrt{3 \cdot g \cdot h} \end{cases} \quad (II.18)$$

Perioada corespunzătoare este

$$T = \frac{\pi \cdot \ell}{\sqrt{3g \cdot h}} \quad (II.19)$$

Pentru datele furnizate

$$T = \frac{\pi \cdot 30 \times 10^3}{30} = 1000\pi \text{ s} \approx 3140 \text{ s} \approx 52 \text{ minute} \quad (II.20)$$

### Variantă de calcul

Deplasarea centrului de masă față de poziția de echilibru este

$$\Delta\delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{d \cdot \ell}{6h} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{\ell}\right)^2} \approx \frac{d \cdot \ell}{6h} \quad (II.21)$$

Energia potențială gravifică a apei „legănate”,

$$E_{\text{potențoten}} = \frac{L \cdot \ell \cdot \rho \cdot g \cdot d^2}{6} \quad (II.22)$$

se poate rescrie ca

$$\begin{cases} E_{\text{potențoten}} = \frac{1}{2} \left( \frac{12L\rho gh^2}{\ell} \right) \frac{d^2 \cdot \ell^2}{36h^2} \\ E_{\text{potențoten}} = \frac{1}{2} \left( \frac{12L\rho gh^2}{\ell} \right) (\Delta\delta)^2 \end{cases} \quad (II.23)$$

fiind deci o energie potențială de tip elastic – proporțională cu pătratul „deformării”.

Constanta elastică a mișcării ar fi

$$K = \frac{12L\rho gh^2}{\ell} = \frac{12L\ell\rho gh^2}{\ell^2} = \frac{12hg}{\ell^2}(m + m_{\text{fix}}) \quad (II.24)$$

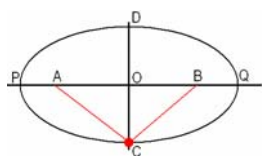
Expresia constantei elastice permite regăsirea pulsației legănării sub forma

$$\omega^2 = \frac{12hg}{\ell^2} \quad (II.25)$$

## II.B. Mărgică

(5 puncte)

Un fir inextensibil și cu masa neglijabilă având lungimea  $2\ell$  este suspendat în punctele  $A$  și  $B$  situate pe aceeași orizontală la distanța  $2d$  unul de altul ( $d < \ell$ ). O mărgică mică și grea poate aluneca fără frecare pe fir. Determină expresia perioadei micilor oscilații ale mărgicii în planul vertical care trece prin punctele de suspensie ale firului. Accelerația gravitațională este  $g$ .



Ține eventual seamă că:

elipsa este locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe este constantă. Analitic, într-un sistem de coordonate cartezian, ecuația elipsei este  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  unde  $|OP| = |OQ| = a$  este

semi-axa mare a elipsei iar  $|OC| = |OD| = b$  este semi-axa mică. Pentru

situația din problemă  $|AC| = |CB| = \ell$  și  $|AO| = |OB| = d$ . Pentru punctul  $P$  constanța sumei distanțelor conduce la  $|PA| + |PB| = a - d + a + d = 2a = 2\ell$ .

### Mărgică – Soluție

Deoarece suma distanțelor de la mărgică la punctele  $A$  și  $B$  este tot timpul  $2\ell$ , traiectoria mărgicii este un arc de elipsă cu semi-axa mare

$$a = \ell \quad (II.26)$$

și semi-axa mică

$$b = \sqrt{\ell^2 - d^2} \quad (II.27)$$

Ecuația traiectoriei este

$$\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{(\ell^2 - d^2)} = 1 \quad (II.28)$$

sau, deoarece mișcarea se desfășoară pe arcul inferior al elipsei,

$$y = -\sqrt{\ell^2 - d^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \quad (II.29)$$

Considerând

$$y = 0 \quad (II.30)$$

ca punct de referință pentru energia potențială – punct de energie potențială nulă, se poate scrie expresia energiei potențiale gravitaționale a mărgicii sub forma

$$U = m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \quad (II.31)$$

Minimul energiei potențiale se realizează pentru

$$x = 0 \quad (II.32)$$

Pentru deplasări mici  $x \ll \ell$ , folosind dezvoltarea sugerată pentru radical, energia potențială se scrie

$$\begin{cases} U = m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} \right) \\ U = -m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2} + \frac{m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{2\ell^2} \cdot x^2 \\ U = U_0 + \frac{k}{2} \cdot x^2 \end{cases} \quad (II.33)$$

cu o „constantă elastică”

$$k = \frac{m \cdot g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2} \quad (II.34)$$

Scrisă în ultima formă din ( ) expresia energiei potențiale a mărgelei este similară celei scrise pentru un oscilator armonic

$$U - U_0 = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \quad (II.35)$$

Pulsația oscilației mărgelei se poate deci scrie sub forma

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2} \\ \omega = \sqrt{\frac{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell^2}} \end{cases} \quad (II.36)$$

Perioada oscilației este deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot \ell}{\sqrt{g \sqrt{\ell^2 - d^2}}} \quad (II.37)$$

Așa cum era de așteptat, pentru  $d \ll \ell$  perioada devine

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (II.38)$$

identică aceleia a unui pendul simplu.

### III. Lilioci și carotidă

#### III.A. Lilioci și....

(5 puncte)

Liliicii își dirijează zborul și localizează prada emițând ultrasunete și detectând ecoul acestora. Abilitatea lor de a prinde insecte, în timp ce zboară în întuneric cu viteză mare este uimitoare, iar sistemul lor sofisticat de ecolocație le permite să distingă între un fluture în zbor și o frunză în cădere.



Consideră că aerul este imobil în raport cu Pământul și că un liliac zboară spre un fluture cu viteza de  $9,0 \text{ m/s}$  față de aer, în timp ce fluturile zboară către liliac cu viteza de  $8,0 \text{ m/s}$  față de aer. Viteza ultrasunetelor în aer este  $v = 343 \text{ m/s}$ . În timpul zborului, liliacul emite semnale ultrasonore de scurtă durată și de o anumită frecvență și recepționează ultrasunetele reflectate de către fluturile în mișcare. Mai mult, liliacul modifică frecvența ultrasunetelor pe care le emite, până când frecvența ultrasunetelor recepționate devine  $83 \text{ kHz}$ , frecvență la care acesta „aude” cel mai bine.

a. Modelează situația descrisă mai sus, considerând o sursă punctiformă aflată în mișcare cu viteza absolută  $\vec{v}_s$ , care emite semnale cu frecvența  $\nu$  și un detector mobil care se mișcă pe aceeași direcție ca și sursa cu viteza absolută  $\vec{v}_d$ , orientată în sens opus vitezei  $\vec{v}_s$ . Semnalele emise de sursă se propagă în mediu cu viteza  $\vec{v}$  sub formă de unde sferice. Presupune că atât sursa cât și detectorul se deplasează cu viteze având valori mai mici decât cea a vitezei de propagare a semnalelor emise de sursă.

Determină, din punct de vedere al fizicii clasice expresia frecvenței semnalelor recepționate de detector, în funcție de frecvența  $\nu$  a semnalelor emise de sursă, de valoarea vitezei absolute  $v_s$  a sursei, de valoarea vitezei absolute a detectorului  $v_d$  precum și de valoarea vitezei  $v$  de propagare a undelor mecanice. Analizează atât cazul în care sursa și detectorul se apropie, așa cum este menționat în enunțul problemei, cât și în cazul când acestea se depărtează.

b. Calculează frecvența ultrasunetelor percepute și reflectate de către fluture, dacă frecvența ultrasunetelor recepționate de către liliac este de  $83 \text{ kHz}$ .

c. Calculează frecvența ultrasunetelor emise de liliac, astfel încât frecvența ultrasunetelor recepționate de acesta să fie  $83 \text{ kHz}$ .

#### Lilioci și....- Soluție

a. Modelează situația descrisă mai sus, considerând o sursă punctiformă aflată în mișcare cu viteza absolută  $\vec{v}_s$ , care emite semnale cu frecvența  $\nu$  și un detector mobil care se mișcă pe aceeași direcție ca și sursa cu viteza absolută  $\vec{v}_d$ , orientată în sens opus vitezei  $\vec{v}_s$ . Semnalele emise de sursă se propagă în mediu cu viteza  $\vec{v}$  sub formă de unde sferice. Presupune că atât sursa cât și detectorul se deplasează cu viteze având valori mai mici decât cea a vitezei de propagare a semnalelor emise de sursă.

Determină, din punct de vedere al fizicii clasice expresia frecvenței semnalelor recepționate de detector, în funcție de frecvența  $\nu$  a semnalelor emise de sursă, de valoarea vitezei absolute  $v_s$  a sursei, de valoarea vitezei absolute a detectorului  $v_d$  precum și de valoarea vitezei  $v$  de propagare a undelor mecanice. Analizează atât cazul în care sursa și detectorul se apropie, așa cum este menționat în enunțul problemei, cât și în cazul când acestea se depărtează.

În conformitate cu enunțul problemei, se vor utiliza următoarele notații:

$v_S$  - valoarea vitezei absolute de deplasare a sursei S de vibrații (valoarea vitezei sursei în raport cu mediul considerat imobil prin care aceasta se deplasează);

$v_D$  - valoarea vitezei absolute de deplasare a detectorului D (valoarea vitezei detectorului în raport cu mediul considerat imobil prin care acesta se deplasează);

$v$  - valoarea vitezei de propagare a undelor mecanice prin mediul considerat;

$T$  - perioada semnalelor emise de sursa S;

$\nu$  - frecvența  $\nu$  a semnalelor emise de sursa S.

Întrucât sursa și detectorul se mișcă de-a lungul aceleiași direcții, având vitezele orientate în sens opus, pot apărea următoarele situații:

Cazul 1 - sursa și detectorul se apropie, deplasându-se pe aceeași direcție, așa cum este ilustrat în figura III.1.

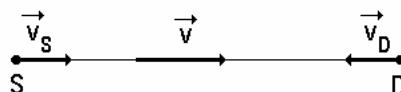


Figura III.1

Această situație poate fi ușor analizată alegând, de exemplu, un sistem de referință solidar legat de detectorul D (figura III.2).

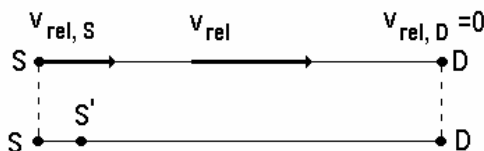


Figura III.2

În raport cu sistemul ales, expresiile vitezelor relative sunt:

$$v_{relS} = v_S + v_D \quad (III.1)$$

$$v_{relD} = 0 \quad (III.2)$$

$$v_{rel} = v + v_D \quad (III.3)$$

Consideră că la momentul de timp  $t$  o vibrație provenind de la sursa S, începe să se propage prin mediu și ajunge la detectorul D la momentul de timp

$$t_1 = t + \frac{SD}{v_{rel}} \quad (III.4)$$

adică

$$t_1 = t + \frac{SD}{v + v_D} \quad (III.5)$$

Următoarea vibrație va fi emisă de sursă la momentul de timp  $t + T$ , atunci când sursa se află în poziția S' și a parcurs distanța

$$SS' = v_{relS} \cdot T = (v_S + v_D) \cdot T \quad (III.6)$$

Această a doua vibrație va ajunge la detector la momentul de timp

$$t_2 = t + T + \frac{S'D}{v_{rel}} \quad (III.7)$$

adică

$$t_2 = t + T + \frac{S'D}{v + v_D} \quad (III.8)$$

Intervalul de timp scurs între recepția celor două vibrații consecutive, provenite de la sursa S, adică perioada de recepție de către detector a vibrațiilor este

$$T'_1 = t_2 - t_1 \quad (III.9)$$

Combinând relațiile (1.5), (1.8) și (1.9) se obține

$$T'_1 = T - \frac{SD - S'D}{v + v_D} \quad (III.10)$$

Ținând cont că în conformitate cu fig.III.2

$$SD - S'D = SS' \quad (III.11)$$

și utilizând relațiile (III.7), (III.10) și (III.11) se obține expresia perioadei de recepție a vibrațiilor, de către detector

$$T'_1 = T \cdot \frac{v - v_S}{v + v_D} \quad (III.12)$$

respectiv expresia frecvenței vibrațiilor recepționate de către detector

$$\nu'_1 = \nu \cdot \frac{v + v_D}{v - v_S} \quad (III.13)$$

Cazul 2 - sursa și detectorul se depărtează, deplasându-se pe aceeași direcție, așa cum este ilustrat în figura III.3.

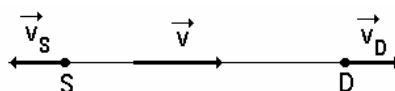


Figura III.3

Această situație poate fi ușor analizată alegând, de exemplu, un sistem de referință solidar legat de detectorul D (figura III 4).

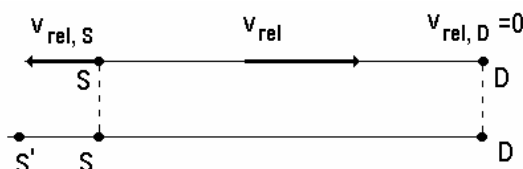


Figura III.4

În raport cu sistemul ales, expresiile vitezelor relative sunt:

$$v'_{rel,S} = v_S + v_D \quad (III.14)$$

$$v'_{rel,D} = 0 \quad (III.15)$$

$$v'_{rel} = v - v_D \quad (III.16)$$

Consideră că la momentul de timp  $t$  o vibrație provenind de la sursa S, începe să se propage și ajunge la detectorul D la momentul de timp

$$t'_1 = t + \frac{SD}{v'_{rel}} \quad (III.17)$$

adică

$$t'_1 = t + \frac{SD}{v - v_D} \quad (III.18)$$

Următoarea vibrație va fi emisă de sursă la momentul de timp  $t + T$ , atunci când sursa se află în poziția S' și a parcurs distanța

$$SS' = v'_{relS} \cdot T = (v_S + v_D) \cdot T \quad (III.19)$$

Această a doua vibrație va ajunge la detector la momentul de timp

$$t'_2 = t + T + \frac{S'D}{v'_{rel}} \quad (III.20)$$

adică

$$t'_2 = t + T + \frac{S'D}{v - v_D} \quad (III.21)$$

Intervalul de timp scurs între recepția celor două vibrații consecutive, provenite de la sursa S, adică perioada de recepție de către detector a vibrațiilor este

$$T'_2 = t'_2 - t'_1 \quad (III.22)$$

Combinând relațiile (III.16), (III.21) și (III.22) se obține

$$T'_2 = T + \frac{S'D - SD}{v - v_D} \quad (III.23)$$

Ținând cont că în conformitate cu fig.III.4

$$S'D - SD = SS' \quad (III.24)$$

și utilizând relațiile (1.19), (1.23) și (1.24) se obține expresia perioadei de recepție a vibrațiilor, de către detector

$$T'_1 = T \cdot \frac{v + v_S}{v - v_D} \quad (III.25)$$

respectiv expresia frecvenței vibrațiilor recepționate de către detector

$$v'_2 = v \cdot \frac{v - v_D}{v + v_S} \quad (III.26)$$

Combinând relațiile (III.13) și (III.26) se obține expresia generală

$$v'_{1,2} = v \cdot \frac{v \pm v_D}{v \mp v_S} \quad (III.27)$$

Relația (III.27) reprezintă răspunsul la punctul a.

*b. Calculează frecvența ultrasunetelor percepute și reflectate de către fluture, dacă frecvența ultrasunetelor recepționate de către liliac este de 83 kHz .*

Întrucât în enunțul problemei se precizează că fluturile și liliacul zboară pe aceeași direcție, unul către celălalt, se va utiliza relația (III.13). În situația descrisă la punctul b, fluturile pe care se reflectă ultrasunetele îndeplinesc rolul sursei, iar liliacul ce recepționează acele ultrasunete cu frecvența de 83 kHz care au fost reflectate de fluture, îndeplinesc rolul de detector. În aceste condiții relația (III.13) devine

$$v'_{\text{ecou, liliac}} = v_{\text{fluture}} \cdot \frac{v + v_{\text{liliac}}}{v - v_{\text{fluture}}} \quad (\text{III.28})$$

$$v_{\text{fluture}} = v'_{\text{ecou, liliac}} \cdot \frac{v - v_{\text{fluture}}}{v + v_{\text{liliac}}} \quad (\text{III.29})$$

Ținând cont că

$$\begin{cases} v'_{\text{ecou, liliac}} = 83 \text{ kHz} \\ v = 343 \text{ m/s} \\ v_{\text{liliac}} = 9,0 \text{ m/s} \\ v_{\text{fluture}} = 8,0 \text{ m/s} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

și efectuând calculele numerice se obține

$$v_{\text{fluture}} = 83 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot \frac{(343 - 8) \text{ m/s}}{(343 + 9) \text{ m/s}} = 78,99 \text{ kHz} \quad (\text{III.31})$$

$$v_{\text{fluture}} \cong 79 \text{ kHz} \quad (\text{III.32})$$

Relația (III.32) reprezintă răspunsul la punctul b.

*c. Calculează frecvența ultrasunetelor emise de liliac, astfel încât frecvența ultrasunetelor recepționate de acesta să fie 83 kHz .*

Și în acest caz se utilizează relația (III.13), în care liliacul îndeplinește rolul sursei ce emite ultrasunete cu frecvența  $v_{\text{emis, liliac}}$ , iar fluturile are rolul de detector care recepționează ultrasunetele cu frecvența  $v_{\text{fluture}}$ , determinată la punctul b.

$$v_{\text{fluture}} = v_{\text{emis, liliac}} \cdot \frac{v + v_{\text{fluture}}}{v - v_{\text{liliac}}} \quad (\text{III.33})$$

$$v_{\text{emis, liliac}} = v_{\text{fluture}} \cdot \frac{v - v_{\text{liliac}}}{v + v_{\text{fluture}}} \quad (\text{III.34})$$

$$v_{\text{emis, liliac}} = 78,99 \text{ kHz} \cdot \frac{(343 - 9) \text{ m/s}}{(343 + 8) \text{ m/s}} = 75,16 \text{ kHz} \quad (\text{III.35})$$

$$v_{\text{emis, liliac}} \cong 75 \text{ kHz} \quad (\text{III.36})$$

Relația (III.36) reprezintă răspunsul la punctul c.

**III.B. Carotide****(5 puncte)**

Ecografele - dispozitive de scanare arterială cu ultrasunete de înaltă frecvență (7 – 12 MHz), permit obținerea unor imagini cu rezoluție foarte bună a arterelor situate în imediata vecinătate a suprafeței corpului, cum ar fi carotidele, precum și determinarea vitezei de curgere a sângelui prin acestea.

Aceste dispozitive conțin o sursă ce emite ultrasunete, care vor fi reflectate de „particulele” în mișcare din componența sângelui și un detector ce poate măsura cu precizie frecvența bătailor obținute din suprapunerea la un moment dat a oscilațiilor provenite din undele ultrasonore incidente și reflectate.

Consideră că sursa de ultrasunete și detectorul sunt situate foarte aproape unul de celalalt, că frecvența ultrasunetelor utilizate este de  $\nu = 7 \text{ MHz}$  și că viteza de propagare a acestora prin arteră are valoarea

$$v_{\text{ultrasunet}} = 1540 \text{ m/s}.$$

Presupune că viteza  $\vec{v}$  de curgere a sângelui are aceeași valoare în toate punctele unei secțiuni transversale prin arteră.

Așezând dispozitivul de scanare arterială cu ultrasunete în poziții succesive, deasupra carotidei se constată că frecvența bătailor este de  $\Delta\nu = 3,64 \text{ kHz}$ , cu excepția unei mici porțiuni în care frecvența bătailor devine  $\Delta\nu' = 4,55 \text{ kHz}$ . Creșterea frecvenței bătailor indică o îngroșare a peretelui carotidei și o obturare parțială a acesteia. Consideră că în timpul fiecărei determinări, dispozitivul de scanare arterială este în repaus față de corpul persoanei pentru care se fac măsurătorile și utilizează informațiile din figura III.5.

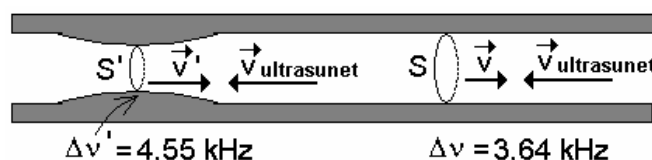


Figura III.5

a. Determină valoarea  $v$  a vitezei de curgere a sângelui prin secțiunea transversală  $S$  a carotidei.

b. Estimează gradul de obturare  $\frac{S-S'}{S}$  a carotidei.

**Carotidă – Soluție**

a. Determină valoarea  $v$  a vitezei de curgere a sângelui prin secțiunea transversală  $S$  a carotidei.

Întrucât sursa de ultrasunete a ecografului este în repaus față de corpul persoanei pentru care se fac măsurătorile, frecvența ultrasunetelor reflectate de către „particulele” în mișcare din compoziția sângelui are expresia

$$\nu' = \nu \frac{v_{\text{sange}} + v_{\text{ultrasunet}}}{v_{\text{ultrasunet}}} \quad (\text{III.37})$$

în care  $v_{\text{sange}}$  reprezintă viteza de curgere a sângelui prin arteră.

Frecvența ultrasunetelor recepționate de detectorului ecografului este

$$\nu'' = \nu' \frac{v_{\text{ultrasunet}}}{v_{\text{ultrasunet}} - v_{\text{sange}}} \quad (\text{III.38})$$

Combinând relațiile (III.37) și (III.38) se obține

$$\nu'' = \nu \frac{v_{\text{ultrasunet}} + v_{\text{sange}}}{v_{\text{ultrasunet}} - v_{\text{sange}}} \quad (\text{III.39})$$

Expresia frecvenței bătailor înregistrate de detectorul ecografului

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu' \quad (\text{III.40})$$

combinată cu relațiile (III.39) și (III.40) permite obținerea expresiei

$$\Delta v = v \frac{2v_{sange}}{v_{ultrasunet} - v_{sange}} \quad (III.41)$$

Astfel, viteza de curgere a sângelui prin arteră are expresia

$$v_{sange} = \Delta v \frac{v_{ultrasunet}}{2v + \Delta v} \quad (III.42)$$

Conform figurii III.5, viteza de curgere a sângelui prin secțiunea transversală  $S$  a carotidei este notată cu  $v$ . Folosind relația (III.42) se obține

$$v = \Delta v \frac{v_{ultrasunet}}{2v + \Delta v} \quad (III.43)$$

Prin urmare viteza  $v$  de curgere a sângelui prin secțiunea transversală  $S$  a carotidei are valoarea

$$v \cong 40 \text{ cm/s} \quad (III.44)$$

Relația (8) reprezintă răspunsul la punctul a.

b. . Estimează gradul de obturare  $\frac{S - S'}{S}$  a carotidei.

În porțiunea din artera carotidă unde apare o îngroșare a peretelui arterei, viteza de curgere a sângelui este

$$v' = \Delta v' \frac{v_{ultrasunet}}{2v' + \Delta v'} \quad (III.45)$$

Combinând ecuația de continuitate

$$S \cdot v = S' \cdot v' \quad (III.46)$$

cu relațiile (III.43) și (III.45) se obține

$$S' = S \frac{\Delta v \cdot (2v + \Delta v')}{\Delta v' \cdot (2v + \Delta v)} \quad (III.47)$$

Astfel, gradul de obturare  $\eta = \frac{S - S'}{S}$  a carotidei devine

$$\eta = 1 - \frac{S'}{S} = 1 - \frac{\Delta v \cdot (2v + \Delta v')}{\Delta v' \cdot (2v + \Delta v)} \quad (III.48)$$

și are valoarea numerică

$$\eta \cong 20\% \quad (III.49)$$

Relația (III.49) reprezintă răspunsul la punctul b.