

*Olimpiada Națională de Fizică  
Vaslui 2015  
Proba de baraj*

*Baraj*

*Problema a V-a (10 puncte)  
Energii în solide*

Solidele sunt cel mai adesea cristale. Un cristal este o structură de ioni, atomi sau molecule, dispuse în spațiu astfel încât să respecte simetria de translație pe trei direcții independente. Legăturile de natură electrică dintre constituenții solidului sunt caracterizate de energii care, macroscopic, determină caracteristicile termice ale materialului – căldura specifică sau căldura latentă.

Imaginează-ți un cristal ionic unidimensional, ca pe un șir infinit de ioni alternativ pozitivi  $+q$  și negativi  $-q$ , aflați în poziții fixe separate prin distanțe egale cu  $a$ .

**a.** Determină expresia energiei potențiale de interacțiune electrostatică dintre un ion și toți ceilalți ioni din șirul infinit. Calculează valoarea acestei energii pentru cazul în care  $q = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$  și  $a = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Permitivitatea electrică a vidului este  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

La metale, cristalul este format din atomi, cufundați într-o „baie” alcătuită din electronii pe care atomii îi pun în comun. Acești electroni delocalizați sunt liberi în interiorul metalului și sunt adesea tratați ca un „gaz electronic”, similar cu gazul ideal. Pentru electronii din gazul electronic se presupune validă echipartiția energiei.

La echilibru termic energia medie a electronilor depinde de temperatura  $T$ . Prin urmare, electronii au o contribuție la căldura specifică a materialului. Dacă energia medie a unui electron din gazul electronic este notată cu  $\bar{E}$ , atunci se poate defini  $c_v$  - o contribuție a fiecărui electron la căldura specifică la volum constant a gazului electronic prin relația

$$c_v = \frac{d\bar{E}}{dT} \quad (1)$$

**b.** Demonstrează că, în modelul gazului electronic similar gazului ideal, căldura specifică electronică este independentă de temperatură. Determină valoarea acestei călduri specifice. Constanta lui Boltzmann este  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Modelarea clasică a căldurii specifice electronice s-a dovedit neadecvată. Măsurarea experimentală a căldurii specifice datorate electronilor de conducție din metal arată că aceasta depinde de temperatură și că valoarea sa este cu două ordine de mărime mai mică decât valoarea prezisă prin aplicarea modelului gazului ideal. În realitate gazul electronic este parțial condensat, electronii ocupând de jos în sus stările energetice disponibile, astfel încât numai electronii de pe nivele ocupate cele mai de sus pot excitați cu ușurință.

În calculul corect al energiei totale a electronilor trebuie avut în vedere că aceștia au la dispoziție numai anumite nivele energetice. Aceste nivele disponibile pot fi ocupate sau nu. Energia totală a electronilor din cristal se obține prin sumarea energiilor pe care le au electronii din stările ocupate. Explicația nepotrivirii dintre valoarea experimentală și valoarea prezisă teoretic este legată de faptul că electronii se supun unei statistici cuantice și nu statisticii clasice, utilizate în modelarea anterioară.

*Olimpiada Națională de Fizică  
Vaslui 2015  
Proba de baraj*

*Baraj*

Conform teoriei cuantice pentru metale, densitatea de stări  $g$  pentru electronii de conducție (numărul de stări energetice ale electronilor, disponibile pe unitatea de volum și pe unitatea de energie) este proporțională cu radicalul energiei electronului. În domeniul de energie  $dE$ , numărul de stări pentru un metal cu volumul  $V$  are expresia

$$dg = C \cdot V \cdot dE \quad (2)$$

unde  $C$  este o constantă de normare.

Probabilitatea  $f(E)$  ca o stare de energie  $E$  să fie ocupată este dată de relația

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-F}{k_B \cdot T}}} \quad (3)$$

În expresie,  $T$  este temperatura absolută, iar  $F$  este o energie constantă numită nivel Fermi. Valorile tipice ale energiei Fermi sunt de câțiva electron volți ( $1\text{eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ).

**c.** Pentru  $T \cong 0\text{K}$  și  $F = 1\text{eV}$  reprezintă grafic funcția  $f(E)$  în domeniul  $E \in (0 \div 2F)$ . Explică semnificația nivelului Fermi la această temperatură.

**d.** Calculează valoarea raportului  $\frac{k_B \cdot T}{F}$  pentru  $T = 300\text{K}$  și  $F = 1\text{eV}$ . Schițează graficul dependenței  $f(E)$  și explică semnificația nivelului Fermi la această temperatură.

**e.** În calculele care urmează consideră că poți reprezenta aproximativ funcția de distribuție  $f(E)$ , ca pe un ansamblu de trei drepte după cum urmează

$$f(E) = \begin{cases} 1 & , E \leq F - k_B \cdot T \\ -\alpha \cdot E + \beta & , F - k_B \cdot T < E < F + k_B \cdot T \\ 0 & , E \geq F + k_B \cdot T \end{cases} \quad (4)$$

Calculează valorile constantelor pozitive  $\alpha$  și  $\beta$ . Ținând seama de relațiile (1) și (2), deduc expresia căldurii specifice  $c_V$ , pentru temperaturi  $T \ll F/k_B$ .

**f.** Compară mărimea căldurii specifice electronice determinate la punctul e. cu aceea calculată în condițiile echipartiției energiei pentru electroni. Comentează rezultatul.

*Dacă îți este necesară, poți folosi identitatea dintre o funcție și seria sa Taylor atașată*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot f^{(i)}(0), \text{ unde } f^{(i)}(0) \text{ este derivata de ordinul } i \text{ a funcției } f(x) \text{ în punctul zero.}$$

*Aplică eventual formula Taylor, funcției  $f(x) = \ln(1+x)$ .*

© Subiect propus de:

Prof. dr. DAVIDESCU Delia

Conf. Univ. dr. DAFINEI Adrian